Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades schneidet die y-Achse bei y = 4 und hat dort die Steigung 2. Der y-Wert des Parabelscheitelpunkts liegt bei y = 6. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann u.a. ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Koeffizienten können darüber hinaus durch das Lösen nichtlinearer Gleichungen ermittelt werden.

II. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

Steigung, d.h.: Ableitung, und Scheitelpunkt machen die Benutzung der 1. Ableitung notwendig:

$f'(x) = 2ax + b$ (**).

III. Der Schnittpunkt der zu bestimmenden Parabel f(x) mit der y-Achse ist wegen y = 4 der Punkt P(0|4). Einsetzen (Punktprobe) dieses Punktes in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punktes) führt auf:

Punkt P(0|4): $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$.

Weiter hat die 1. Ableitung im Punkt P(0|4) den Wert 2, so dass gemäß (**) erfüllt ist:

$f'(0) = 2$: $2a\cdot 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$.

Die bisher berechneten Koeffizienten b = 2 und c = 4 ergeben den noch nicht vollständigen ermittelten Funktionsterm:

$f(x) = ax^2 + 2x + 4$.

Es ist also noch der Koeffizient a zu bestimmen.

IV. Vom Scheitelpunkt der Parabel ist nur der y-Wert 6 bekannt; es gilt also: $S(x_s|6)$. Weiter ist der Scheitelpunkt der Parabel ein Punkt mit waagerechter Tangente, so dass mit Hilfe der 1. Ableitung $f'(x) = 2ax + 2$ für $x = x_s$ gelten muss:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + 2 = 0 \Rightarrow 2ax = -2 \Rightarrow ax = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$ (bei $a\neq 0$).

Der Funktionswert an der Stelle $x_s = x = -\frac{1}{a}$ muss nun y = 6 betragen; also gilt:

$f(-\frac{1}{a}) = a\cdot(-\frac{1}{a})^2 + 2\cdot(-\frac{1}{a}) + 4 = 6$ (***).

Gleichung (***) stellen wir wie folgt nach a um:

$a\cdot(-\frac{1}{a})^2 + 2\cdot(-\frac{1}{a}) + 4 = 6$ (Klammern auflösen)

$a\cdot\frac{1}{a^2} - 2\cdot\frac{1}{a} + 4 = 6$ (Kürzen)

$\frac{1}{a} - 2\cdot\frac{1}{a} + 4 = 6$ (Zusammenfassen)

$-\frac{1}{a} + 4 = 6$ | -4

$-\frac{1}{a} = 2$ | $\cdot$a

-1 = 2a | :2

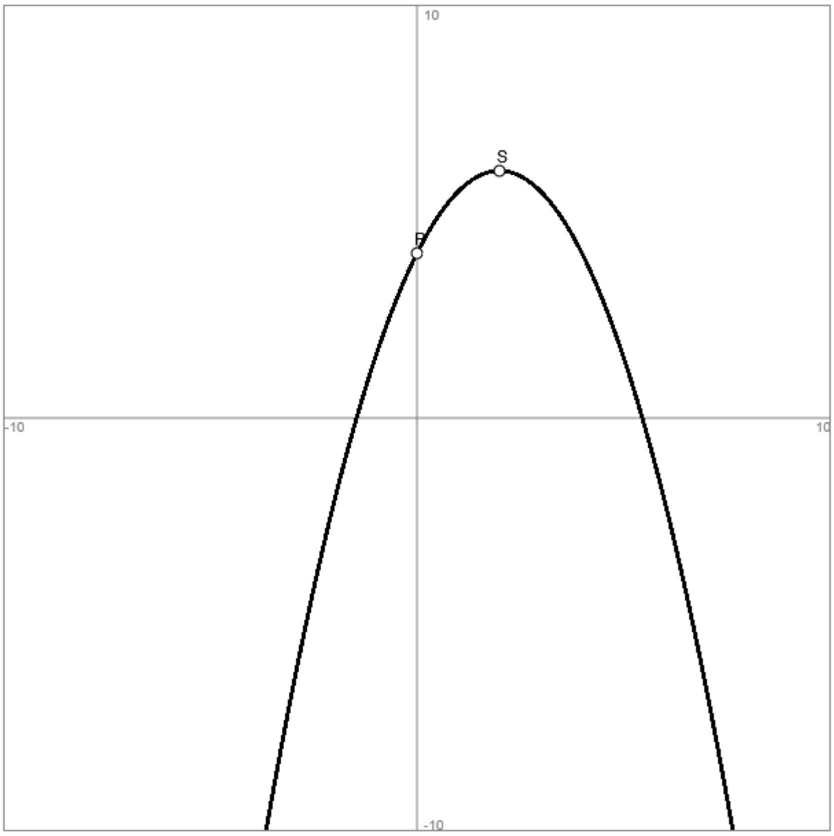
-0,5 = a

Die Funktion f(x) ist damit vollständig bestimmt und lautet:

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 4$.

Mit a = -0,5 und $x_s = -\frac{1}{-0{,}5} = 2$ ist der Scheitelpunkt S(2|6) offensichtlich der Hochpunkt der quadratischen Parabel.

V. <u>Funktionsgraph</u>: $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 4$



www.michael-buhlmann.de / 02.2020 / Aufgabe 986