

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte $P(1|1/8)$ und $Q(3|-9/8)$ und besitzt Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt: $P(1|0.125)$: $f(1) = 0.125 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0.125$

(2) Punkt: $Q(3|-1.125)$: $f(3) = -1.125 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = -1.125$

(3) Nullstelle: $N_1(0|0)$: $f(0) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$

(4) Nullstelle: $N_2(2|0)$: $f(2) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 1a + 1b + 1c + 1d = 0.125$$

$$+ 27a + 9b + 3c + 1d = -1.125$$

$$+ 1d = 0$$

$$+ 8a + 4b + 2c + 1d = 0$$

Anfangstableau:

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0.125$$

$$27 \ 9 \ 3 \ 1 \ | \ -1.125$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0$$

$$8 \ 4 \ 2 \ 1 \ | \ 0$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 27 \cdot (1) / 1 \cdot (4) - 8 \cdot (1) /$

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0.125$$

$$0 \ -18 \ -24 \ -26 \ | \ -4.5$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ -4 \ -6 \ -7 \ | \ -1$$

2. Schritt: $-9 \cdot (4) + 2 \cdot (2) /$

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0.125$$

$$0 \ -18 \ -24 \ -26 \ | \ -4.5$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ 0 \ 6 \ 11 \ | \ 0$$

Zeilentausch: (3) \leftrightarrow (4) /

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0.125$$

$$0 \ -18 \ -24 \ -26 \ | \ -4.5$$

$$0 \ 0 \ 6 \ 11 \ | \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0$$

3. Schritt: (keine Umformung) /

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0.125$$

$$0 \ -18 \ -24 \ -26 \ | \ -4.5$$

$$0 \ 0 \ 6 \ 11 \ | \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{r} + 1a + 1b + 1c + 1d = 0.125 \\ - 18b - 24c - 26d = -4.5 \\ + 6c + 11d = 0 \\ + 1d = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0.25 \\ a = -0.125 \end{array}$$

III. Funktion: $f(x) = -0.125x^3 + 0.25x^2$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.125x^3 + 0.25x^2$; $f'(x) = -0.375x^2 + 0.5x$; $f''(x) = -0.75x + 0.5$; $f'''(x) = -0.75$

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0.5	-0.75	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Tiefpunkt T(0 0)
0.67	0.0746	0.1667	-0.0025	-0.75	Wendepunkt W(0.67 0.07)
1.34	0.1481	-0.0034	-0.505	-0.75	Hochpunkt H(1.34 0.15)
2	0	-0.5	-1	-0.75	Nullstelle N(2 0)

Graph:

