

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Bestimmungsaufgabe

---

**Aufgabe:** Der Graph einer zur y-Achse des Koordinatensystems symmetrischen ganz rationalen Funktion 4. Grades besitzt eine Nullstelle bei  $x = -1$ , wo die Funktion die Steigung 6 hat. Zudem hat der einzige Hochpunkt der Funktion den y-Wert 2. Wie lautet die Funktionsgleichung?

**Lösung:** I. Ganz rationale Funktion: Ansatz:  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Achsensymmetrie zur y-Achse: Ansatz:  $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ ,  $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Eigenschaften:

(1) Nullstelle bei  $x = -1$ :

a)  $N(-1|0)$ :  $f(-1) = 0 \rightarrow$  Gleichung:  $a \cdot (-1)^4 + c \cdot (-1)^2 + e = 0$

b) Steigung  $\rightarrow f'(-1) = 6 \rightarrow$  Gleichung:  $4a \cdot (-1)^3 + 2c \cdot (-1) = 6$

(2) Achsensymmetrie zur y-Achse  $\rightarrow$  einziger Hochpunkt auf y-Achse  $\rightarrow H(0|2)$ :  $f(0) = 2 \rightarrow$

Gleichung:  $a \cdot 0^4 + c \cdot 0^2 + e = 2$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Diagonalgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 1a + 1c + 1e = 0$$

$$- 4a - 2c = 6$$

$$+ 1e = 2$$

Anfangstableau:

$$1 \ 1 \ 1 \ | \ 0$$

$$-4 \ -2 \ 0 \ | \ 6$$

$$0 \ 0 \ 1 \ | \ 2$$

1. Schritt:  $1 \cdot (2) + 4 \cdot (1) /$

$$1 \ 1 \ 1 \ | \ 0$$

$$0 \ 2 \ 4 \ | \ 6$$

$$0 \ 0 \ 1 \ | \ 2$$

2. Schritt:  $2 \cdot (1) - 1 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

3. Schritt:  $1 \cdot (1) + 2 \cdot (3) / 1 \cdot (2) - 4 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Teilen:  $(1):2 / (2):2 /$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} + 1a & = & -1 \\ + 1c & = & -1 \\ + 1e & = & 2 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

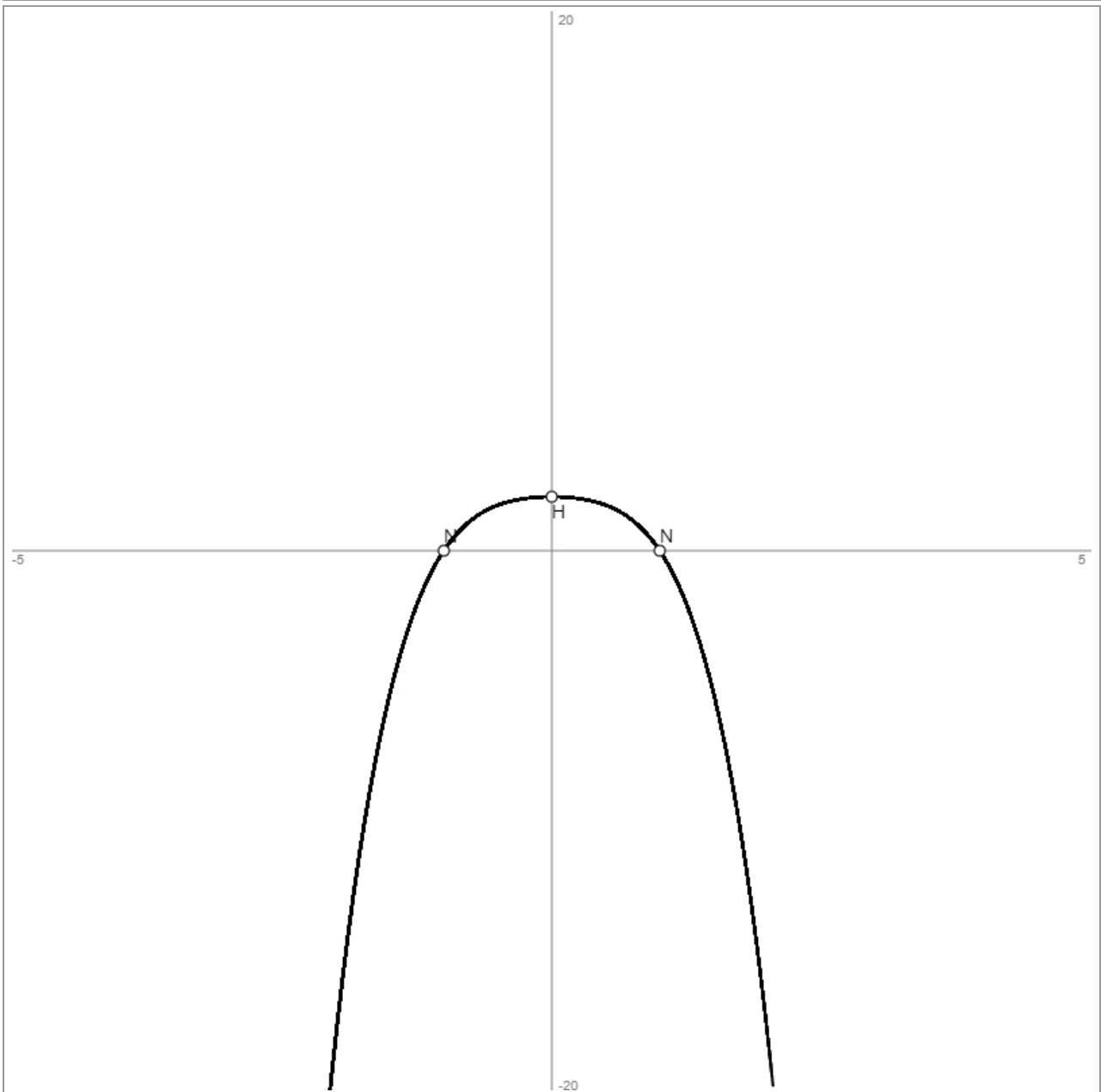
$$\begin{array}{l} a = -1 \\ c = -1 \\ e = 2 \end{array}$$

III. Funktion:  $f(x) = -x^4 - x^2 + 2$

IV. Wertetabelle, Graph:  $f(x) = -x^4 - x^2 + 2$ ;  $f'(x) = -4x^3 - 2x$ ;  $f''(x) = -12x^2 - 2$ ;  $f'''(x) = -24x$

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-648	510	-302	
-4.5	-428.3125	373.5	-245	
-4	-270	264	-194	
-3.5	-160.3125	178.5	-149	
-3	-88	114	-110	
-2.5	-43.3125	67.5	-77	
-2	-18	36	-50	
-1.5	-5.3125	16.5	-29	
-1	0	6	-14	Nullstelle N(-1 0)
-0.5	1.6875	1.5	-5	
0	2	0	-2	Schnittpunkt $S_y(0 2)$ = Hochpunkt H(0 2)
0.5	1.6875	-1.5	-5	
1	0	-6	-14	Nullstelle N(1 0)
1.5	-5.3125	-16.5	-29	
2	-18	-36	-50	
2.5	-43.3125	-67.5	-77	
3	-88	-114	-110	
3.5	-160.3125	-178.5	-149	
4	-270	-264	-194	
4.5	-428.3125	-373.5	-245	
5	-648	-510	-302	

Graph:



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 01.2021 / Aufgabe 1264