Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 4. Grades hat im Ursprung des Koordinatensystems einen Sattelpunkt sowie einen Tiefpunkt bei x = -1. Außerdem liegt der Punkt P(2|10) auf dem Graphen der Funktion. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^3(x+b_1)$ (Sattelpunkt im Ursprung S(0|0)), d.h.: $f(x) = ax^4 + ab_1x^3 = ax^4 + bx^3$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

Eigenschaften:

(1) Sattelpunkt S(0|0)
(2) Tiefpunkt bei x = -1: $f'(-1) = 0$ -> Gleichung: $4a\cdot(-1)^3 + 3b\cdot(-1)^2 = 0$
(3) Punkt P(2|10): $f(2) = 10$ -> Gleichung: $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 = 10$

II. Koeffizientenbestimmung: 2x2-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$- 4a + 3b = 0$
$+ 16a + 8b = 10$

Anfangstableau:

-4	3	|	0
16	8	|	10

1. Schritt: 1*(*2*) + 4*(*1*) /

-4	3	|	0
0	20	|	10

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$- 4a + 3b = 0$
$+ 20b = 10$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$b = 0.5$
$a = 0.375$

III. Funktion: $f(x) = 0,375x^4 + 0,5x^3$

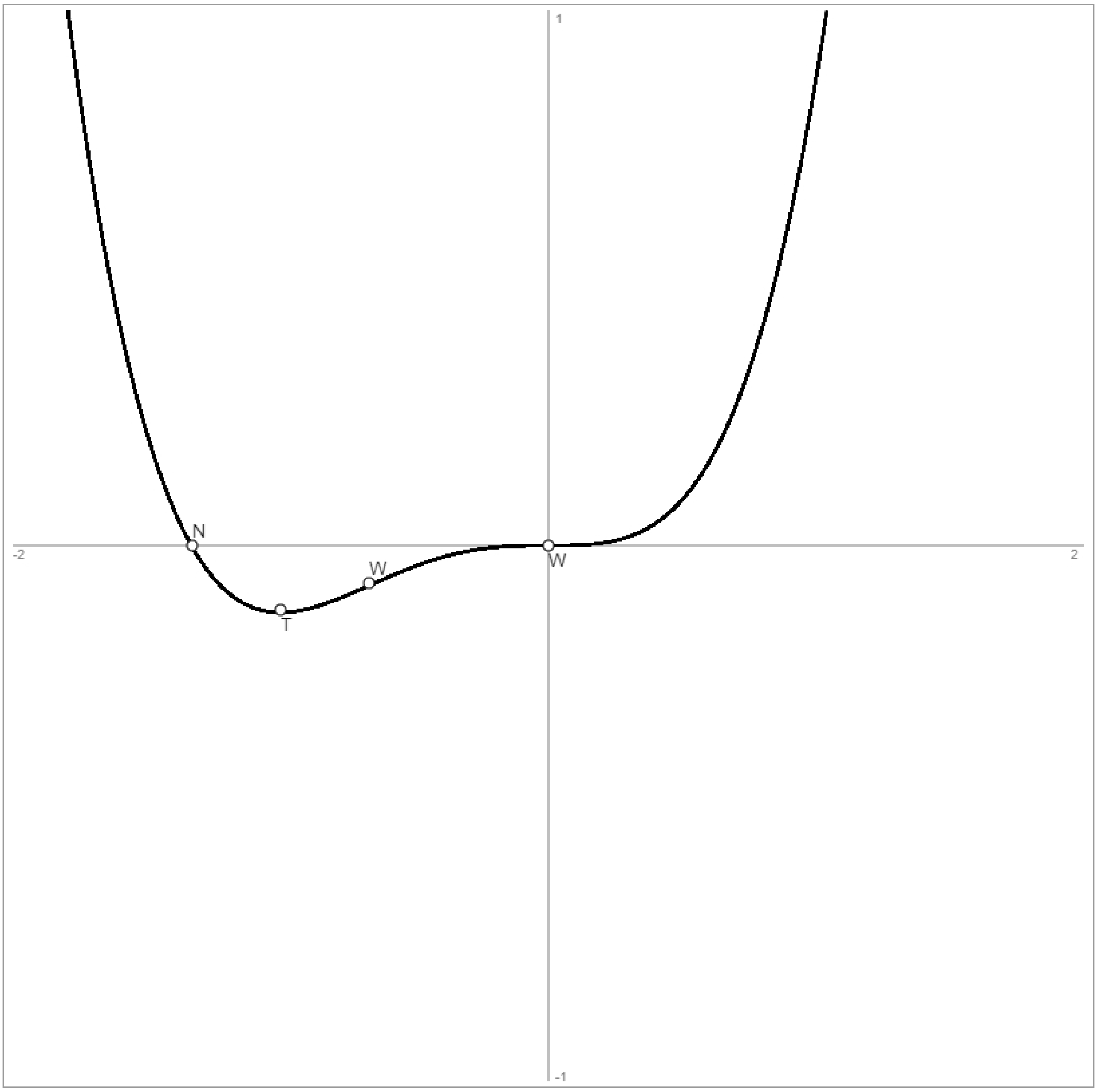
IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0,375x^4 + 0,5x^3$; $f'(x) = 1,5x^3 + 1,5x^2$; $f''(x) = 4,5x^2 + 3x$; $f'''(x) = 9x + 3$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	2	-6	12	
-1.34	0.006	-0.92	4.06	Nullstelle N(-1.34|0.01)
-1.2	-0.0864	-0.43	2.88	
-1	-0.125	0	1.5	Tiefpunkt T(-1|-0.125)
-0.67	-0.0748	0.22	0.01	Wendepunkt W(-0.67|-0.075)
-0.4	-0.0224	0.14	-0.48	
-0.2	-0.0034	0.05	-0.42	

0	0	0	0	Schnittpunkt $S_y(0\|0)$ = Sattelpunkt S(0|0)
0.2	0.0046	0.07	0.78	
0.6	0.1566	0.86	3.42	
1	0.875	3	7.5	
1.2	1.6416	4.75	10.08	
1.4	2.8126	7.06	13.02	
1.6	4.5056	9.98	16.32	
2	10	18	24	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1266