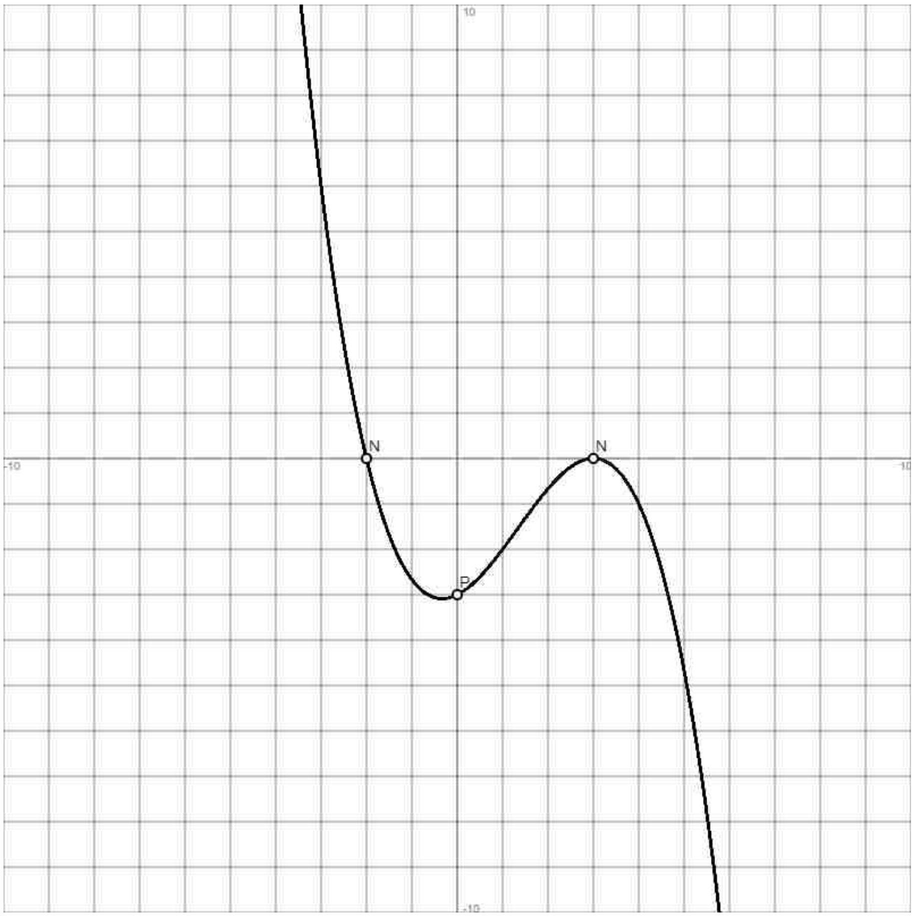
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion f(x) 3. Grades hat das folgende Aussehen:



(Kästchenbreite: 1 Längeneinheit). Bestimme den dazugehörigen Funktionsterm.

Lösung: I. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, wonach jede reell- bzw. komplexwertige ganz rationale Funktion vom Grad n in n von den Nullstellen x_1, … x_k abhängige Linearfaktoren $x-x_1$, … $x-x_k$ zerlegt werden kann, können solche Funktionen in Produktform dargestellt werden, d.h. es gilt:

$$f(x) = a(x-x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k} \quad (*),$$

wenn die Funktion nur reelle Nullstellen x_1, … x_k besitzt und die Summe von deren Vielfachheiten gleich dem Grad der ganz rationalen Funktion ist, wenn also: $n_1+\ldots+n_k = n$ erfüllt ist. Die Vielfachheit einer Nullstelle x_j ist dabei die größte natürliche Zahl n_j, so dass $(x-x_j)^{n_j}$ Faktor der Produktform von f(x) ist. Ist n_j gerade, so stellt die Nullstelle x_j einen Berührpunkt der Funktion an der x-Achse als Hoch- oder Tiefpunkt dar; ist n_j ungerade, so schneidet an der Nullstelle x_j die Funktion die x-Achse auch in Form eines Sattelpunkt ($n_j \geq 3$) (j=1, … k).

II. Im abgebildeten Graphen sind als Nullstellen die einfache Nullstelle $x_1 = -2$ und als Hochpunkt der Funktion f(x) die zweifache (doppelte) Nullstelle $x_2 = 3$ zu erkennen. Die Vielfachheiten 1 bzw.

2 ergeben mit 1+2 = 3 den Grad der ganz rationalen Funktion, so dass eine Produktdarstellung (*) der Funktion trägt gemäß:

$$f(x) = a(x-(-2))^1 \cdot (x-3)^2 = a(x+2)(x-3)^2 \text{ (**)}.$$

III. In der Produktform (**) bestimmen wir noch den Faktor a. Das Einsetzen des Punktes P(0|-3) im abgebildeten Graphen in die Beziehung (**) führt zur Berechnung von a:

$$-3 = f(0) = a \cdot (0+2)(0-3)^2 = a \cdot 2 \cdot 9 = 18a \Leftrightarrow a = -1/6.$$

Mithin lautet der gesuchte Funktionsterm in Produktform:

$$f(x) = -\frac{1}{6}(x+2)(x-3)^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1623