Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion f(x) 4. Grades besitzt die zwei einfachen Nullstellen bei x = -2 und x = 4, die doppelte Nullstelle bei x = 2 und verläuft den Kurvenpunkt P(-1|-4). Bestimme den Funktionsterm.

Lösung: I. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, wonach jede reell- bzw. komplexwertige ganz rationale Funktion vom Grad n in n von den Nullstellen x_1, … x_k abhängige Linearfaktoren $x-x_1$, … $x-x_k$ zerlegt werden kann, können solche Funktionen in <u>Produktform</u> dargestellt werden, d.h. es gilt:

$$f(x) = a(x-x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k} \quad (*),$$

wenn die Funktion nur reelle Nullstellen x_1, … x_k besitzt und die Summe von deren Vielfachheiten gleich dem Grad der ganz rationalen Funktion ist, wenn also: $n_1+\ldots+n_k = n$ erfüllt ist. Die Vielfachheit einer Nullstelle x_j ist dabei die größte natürliche Zahl n_j, so dass $(x-x_j)^{n_j}$ Faktor der Produktform von f(x) ist. Ist n_j gerade, so stellt die Nullstelle x_j einen Berührpunkt der Funktion an der x-Achse als Hoch- oder Tiefpunkt dar; ist n_j ungerade, so schneidet an der Nullstelle x_j die Funktion die x-Achse auch in Form eines Sattelpunkt ($n_j \geq 3$) (j=1, … k).

II. Die Vielfachheiten der einfachen Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_3 = 4$ und der zweifachen (doppelten) Nullstelle $x_2 = 2$ ergeben mit 1+2+1 = 4 den Grad der ganz rationalen Funktion f(x), so dass eine <u>Produktdarstellung</u> (*) der Funktion trägt gemäß:

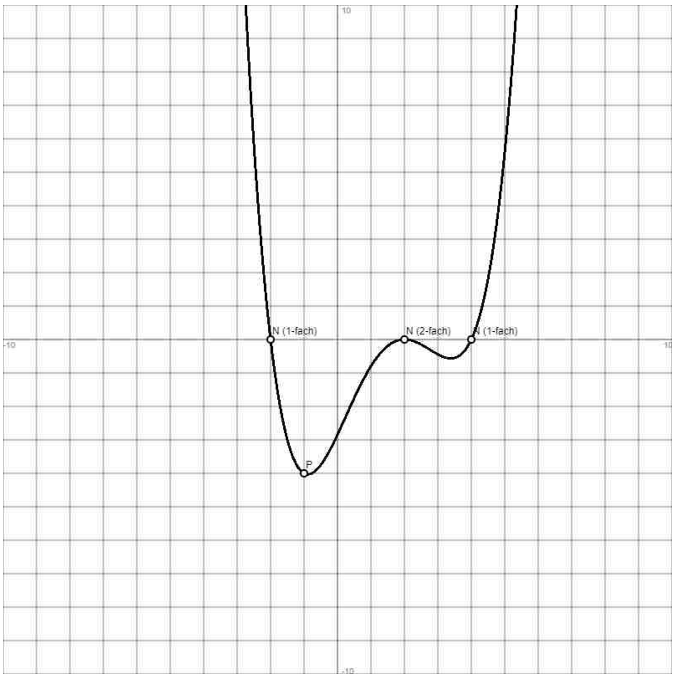
$$f(x) = a(x-(-2))^1 \cdot (x-2)^2 (x-4)^1 = a(x+2)(x-2)^2(x-4) \quad (**).$$

III. In der Produktform (**) bestimmen wir noch den Faktor a. Das Einsetzen des vorgegebenen Punktes P(-1|-4) in die Beziehung (**) führt zur Berechnung von a:

$$-4 = f(-1) = a \cdot (-1+2)(-1-2)^2(-1-4) = a \cdot 1 \cdot (-3)^2 \cdot (-5) = -45a \Leftrightarrow a = 4/45.$$

Mithin lautet der gesuchte <u>Funktionsterm</u> in Produktform:

$$f(x) = \frac{4}{45}(x+2)(x-2)^2(x-4).$$



www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1624