Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 4. Grades besitzt die Nullstellen N(-1|0), N(4|0) sowie den Tiefpunkt T(0|0); außerdem verläuft er im x-y-Koordinatensystem durch den Punkt P(2|6). Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt T(0|0) als Nullstelle: f(0) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$
(2) Punkt T(0|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(0) = 0 -> Gleichung: $4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$
(3) Punkt N(-1|0) als Nullstelle: f(-1) = 0 -> Gleichung: $a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = 0$
(4) Punkt N(4|0) als Nullstelle: f(4) = 0 -> Gleichung: $a \cdot 4^4 + b \cdot 4^3 + c \cdot 4^2 + d \cdot 4 + e = 0$
(5) Punkt P(2|6): f(2) = 6 -> Gleichung: $a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 6$

II. Koeffizientenbestimmung: 5x5-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & & & & & & & & + & 1e & = 0 \\
 & & & & & & + & 1d & & & = 0 \\
+ & 1a & - & 1b & + & 1c & - & 1d & + & 1e & = 0 \\
+ & 256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & + & 1e & = 0 \\
+ & 16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & + & 1e & = 6
\end{array}
$$

Anfangstableau:

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \\
16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 6
\end{array}
$$

Zeilentausch: (*1*) <-> (*3*) /

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \\
16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 6
\end{array}
$$

1. Schritt: 1*(*4*) - 256*(*1*) / 1*(*5*) - 16*(*1*) /

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 320 & -240 & 260 & -255 & 0 \\
0 & 24 & -12 & 18 & -15 & 6
\end{array}
$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*4*) /

1	-1	1	-1	1	|	0
0	320	-240	260	-255	|	0
0	0	0	0	1	|	0
0	0	0	1	0	|	0
0	24	-12	18	-15	|	6

2. Schritt: 40*(*5*) - 3*(*2*) /

1	-1	1	-1	1	|	0
0	320	-240	260	-255	|	0
0	0	0	0	1	|	0
0	0	0	1	0	|	0
0	0	240	-60	165	|	240

Zeilentausch: (*3*) <-> (*5*) /

1	-1	1	-1	1	|	0
0	320	-240	260	-255	|	0
0	0	240	-60	165	|	240
0	0	0	1	0	|	0
0	0	0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
+1a & -1b & +1c & -1d & +1e & = & 0 \\
 & +320b & -240c & +260d & -255e & = & 0 \\
 & & +240c & -60d & +165e & = & 240 \\
 & & & +1d & & = & 0 \\
 & & & & +1e & = & 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = 0$
$d = 0$
$c = 1$
$b = 0.75$
$a = -0.25$

III. Funktion: $f(x) = -0.25x^4 + 0.75x^3 + x^2$

2. Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Eigenschaften:

(1) Punkt T(0|0) als Nullstelle: f(0) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = 0$
(2) Punkt T(0|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(0) = 0 -> Gleichung: $4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d = 0$
(3) Punkt N(-1|0) als Nullstelle: f(-1) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-1)^4 + b\cdot(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 + d\cdot(-1) + e = 0$
(4) Punkt N(4|0) als Nullstelle: f(4) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 4^4 + b\cdot 4^3 + c\cdot 4^2 + d\cdot 4 + e = 0$
(5) Punkt P(2|6): f(2) = 6 -> Gleichung: $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 6$

II. Koeffizientenbestimmung: Gleichung (1) führt auf: e = 0, Gleichung (2) auf d = 0, so dass nur noch die drei Koeffizienten a, b, c mit den Gleichungen (3), (4), (5) zu bestimmen sind. Die Gleichungen werden mit e = 0, d = 0 zu:

(3): $a - b + c = 0$
(4): $256a + 64b + 16c = 0 \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 0$
(5): $16a + 8b + 4c = 6 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c = 3$

Es ergibt sich ein lineares 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt):

Lineares Gleichungssystem:

$+ \ 1a - 1b + 1c = 0$
$+ \ 8a + 4b + 2c = 3$
$+ 16a + 4b + 1c = 0$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 8*(*1*) / 1*(*3*) - 16*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 20 & -15 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(*3*) - 5*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrl} + 1a & - & 1b & + & 1c & = & 0 \\ & + & 12b & - & 6c & = & 3 \\ & & & - & 15c & = & -15 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 1$
$b = 0.75$
$a = -0.25$

III. Funktion: $f(x) = -0.25x^4 + 0.75x^3 + x^2$

3. Lösung: I. Ganz rationale Funktionen können bei hinreichend vielen reellen Nullstellen (mit deren Vielfachheiten) auch als Produkt von Linearfaktoren dargestellt werden. Nun ist die gesuchte ganz rationale Funktion f(x) vom Grad 4 und besitzt laut Eigenschaftenliste die zwei einfachen Nullstellen N(-1|0), N(4|0) sowie den Tiefpunkt T(0|0) als Ursprung und zweifache (doppelte) Nullstelle. Da die Vielfachheiten der drei Nullstellen (1+1+2) den Grad 4 ergeben, lässt sich die Funktion darstellen als:

$f(x) = a\cdot(x+1)(x-0)^2(x-4) = ax^2(x+1)(x-4)$ (*).

II. Es ist somit nur noch der Wert des Koeffizienten a zu bestimmen. Wegen dem vorgegebenen Punkt P(2|6) ergibt die Punktprobe in (*):

$f(2) = a\cdot 2^2(2+1)(2-4) = a\cdot 4\cdot 3\cdot(-2) = -24a = 6 \Leftrightarrow a = -0{,}25$.

III. Die Funktionsgleichung lautet damit: $f(x) = -0{,}25x^2(x+1)(x-4)$ mit:

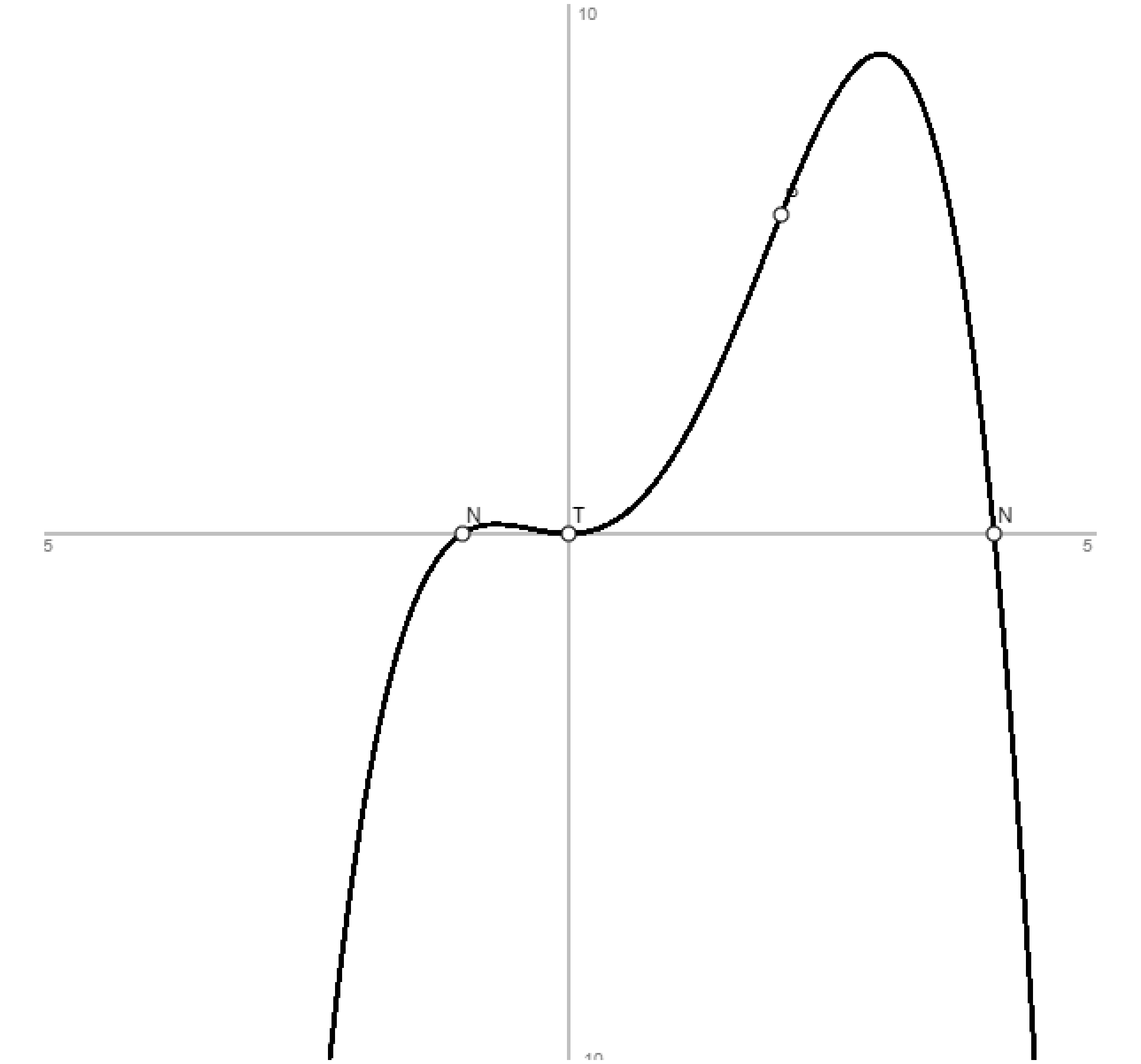
$f(x) = -0{,}25x^2(x+1)(x-4) = -0{,}25x^2(x^2-3x-4) = -0{,}25x^4 + 0{,}75x^3 + x^2$.

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.25x^4 + 0.75x^3 + x^2$; $f'(x) = -x^3 + 2.25x^2 + 2x$;
$f''(x) = -3x^2 + 4.5x + 2$; $f'''(x) = - 6x + 4.5$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1	0	1.25	-5.5	10.5	Nullstelle N(-1|0)
-0.68	0.1731	-0.0052	-2.4472	8.58	Hochpunkt H(-0.68|0.17)

-0.35	0.0866	-0.3815	0.0575	6.6	Wendepunkt W(-0.35|0.09)
0	0	0	2	4.5	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)
1.86	5.2935	5.0692	-0.0088	-6.66	Wendepunkt W(1.86|5.29)
2.94	9.0248	-0.0841	-10.7008	-13.14	Hochpunkt H(2.94|9.02)
4	0	-20	-28	-19.5	Nullstelle N(4|0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1712