

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems. Er schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und besitzt einen Hochpunkt bei $H(2|6)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \rightarrow$ y-Achsensymmetrie
 $\rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e, f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Eigenschaften:

(1) Punkt $P(0|2)$ als Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 0^4 + c \cdot 0^2 + e = 2$

(2) Punkt $H(2|6)$: $f(2) = 6 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 2^4 + c \cdot 2^2 + e = 6$

(3) Punkt $H(2|6)$ als Hoch-/Tiefpunkt: $f'(2) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 2 = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & + 1e = 2 \\ + 16a + 4c + 1e & = 6 \\ + 32a + 4c & = 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 16 & 4 & 1 & 6 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (1) \leftrightarrow (2) /

$$\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (3) - 2 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -12 \end{array}$$

Zeilentausch: (2) \leftrightarrow (3) /

$$\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} + 16a + 4c + 1e & = 6 \\ - 4c - 2e & = -12 \\ + 1e & = 2 \end{aligned}$$

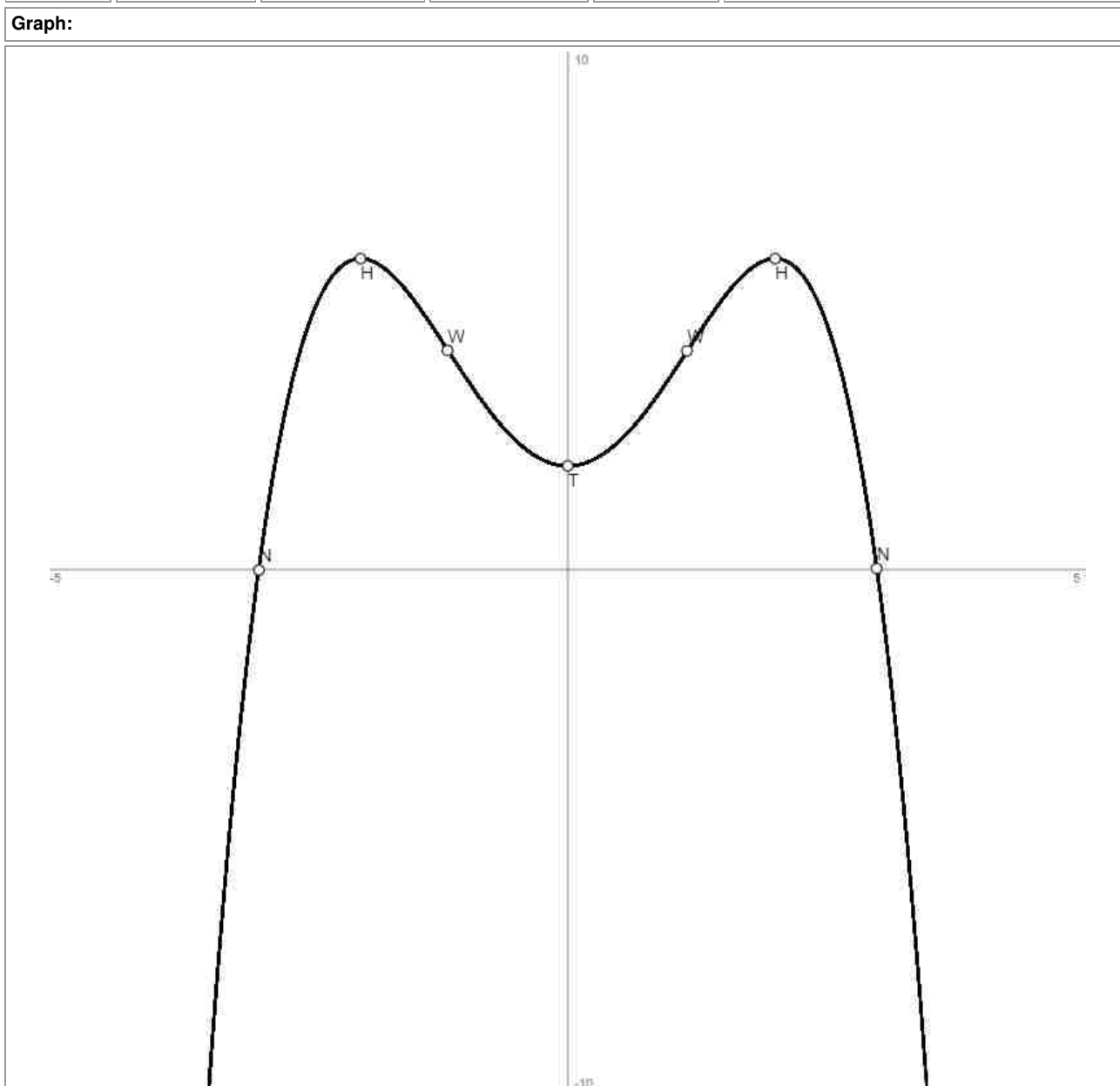
Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} e & = 2 \\ c & = 2 \\ a & = -0.25 \end{aligned}$$

III. Funktion: $f(x) = -0.25x^4 + 2x^2 + 2$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.25x^4 + 2x^2 + 2$; $f'(x) = -x^3 + 4x$; $f''(x) = -3x^2 + 4$; $f'''(x) = -6x$

Wertetabelle:					
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2.98	0	14.5436	-22.6412	17.88	Nullstelle N(-2.98 0)
-2	6	0	-8	12	Hochpunkt H(-2 6)
-1.15	4.2077	-3.0791	0.0325	6.9	Wendepunkt W(-1.15 4.21)
0	2	0	4	0	Schnittpunkt $S_y(0 2)$ = Tiefpunkt T(0 2)
1.15	4.2385	3.0791	-0.0368	-6.96	Wendepunkt W(1.15 4.21)
2	6	0	-8	-12	Hochpunkt H(2 6)
2.98	0	-14.7709	-22.8203	-17.94	Nullstelle N(2.98 0)



www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1713