

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Der Graph einer ganz rationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems. Er besitzt den Hochpunkt bei H(0|3,5), den Wendepunkt W(1|1). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \rightarrow$ y-Achsensymmetrie
 $\rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e, f'(x) = 4ax^3 + 2cx, f''(x) = 12ax^2 + 2c$

Eigenschaften:

(1) Punkt H(0|3.5) als Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 3.5 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 0^4 + c \cdot 0^2 + e = 3.5$

(2) Punkt H(0|3.5) als Hoch-/Tiefpunkt: $4a \cdot 0^3 + 2c \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (nicht verwendbar für die Berechnung)

(3) Punkt W(1|1): $f(1) = 1 \rightarrow$ Gleichung: $a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + e = 1$

(4) Punkt H(1|1) als Wendepunkt: $f''(1) = 0 \rightarrow$ Gleichung: $12a \cdot 1^2 + 2c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} & + 1e & = 3.5 \\ + 1a & + 1c & + 1e = 1 \\ + 12a & + 2c & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (1) \leftrightarrow (2) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (3) - 12 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 \\ 0 & -10 & -12 & -12 \end{array}$$

Zeilentausch: (2) \leftrightarrow (3) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} + 1a & + & 1c & + & 1e & = & 1 \\ & & - 10c & - & 12e & = & -12 \\ & & & & + 1e & = & 3.5 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$e = 3.5$

$c = -3$

$a = 0.5$

III. Funktion: $f(x) = 0.5x^4 - 3x^2 + 3.5$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = 0.5x^4 - 3x^2 + 3.5$; $f'(x) = 2x^3 - 6x$; $f''(x) = 6x^2 - 6$; $f'''(x) = 12x$

| Wertetabelle: | | | | |
|---------------|---------|-------|--------|--|
| x | f(x) | f'(x) | f''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
| -2.1 | 0 | -6.13 | 20.71 | Nullstelle N(-2.1 0) |
| -1.74 | -0.9996 | 0 | 12.17 | Tiefpunkt T(-1.74 -1) |
| -1.26 | 0 | 3.56 | 3.53 | Nullstelle N(-1.26 0) |
| -1 | 1 | 4 | 0 | Wendepunkt W(-1 1) |
| 0 | 3.5 | 0 | -6 | Schnittpunkt $S_y(0 3.5) =$ Hochpunkt H(0 3.5) |
| 1 | 1 | -4 | 0 | Wendepunkt W(1 1) |
| 1.25 | 0 | -3.59 | 3.38 | Nullstelle N(1.25 0.03) |
| 1.73 | -1 | 0 | 11.96 | Tiefpunkt T(1.73 -1) |
| 2.1 | 0 | 5.92 | 20.46 | Nullstelle N(2.1 0) |

