**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Bestimmungsaufgabe

---

**Aufgabe**: Gesucht ist die Gleichung einer ganz rationalen Funktion f(x) vom Grad 6, deren Graph die Sattelpunkte $S_1(-2|y_1)$ und $S_2(2|y_2)$, $y_1$, $y_2$ reell, und eine waagerechte Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse besitzt.

**Lösung**: I. Ansatz: Die Gleichung der gesuchten Funktion f(x) ist mit ihren Ableitungen vom Typ:
$f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$
$f'(x) = 6ax^5 + 5bx^4 + 4cx^3 + 3dx^2 + 2ex + f$
$f''(x) = 30ax^4 + 20bx^3 + 12cx^2 + 6dx + 2e$.

II. Einsetzen der Funktionseigenschaften führt dann auf:
Sattelpunkt $S_1(-2|0)$:
$f(-2) = 64a – 32b + 16c – 8d + 4e – 2f + g = y_1$ (Sattelpunkt als Funktionspunkt)
$f'(-2) = -192a + 80b – 32c + 12d – 4e + f = 0$ (Sattelpunkt als Punkt mit waagerechter Tangente)
$f''(-2) = 480a – 160b + 48c – 12d + 2e = 0$ (Sattelpunkt als Wendepunkt)
Sattelpunkt $S_2(2|4)$:
$f(2) = 64a + 32b + 16c + 8d + 4e + 2f + g = y_2$ (Sattelpunkt als Funktionspunkt)
$f'(2) = 192a + 80b + 32c + 12d + 4e + f = 0$ (Sattelpunkt als Punkt mit waagerechter Tangente)
$f''(2) = 480a + 160b + 48c + 12d + 2e = 0$ (Sattelpunkt als Wendepunkt)
Waagerechte Tangente an der Stelle x = 0 (Schnittpunkt mit der y-Achse)
$f'(0) = f = 0$.

III. Es ergibt sich damit ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a bis g, das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gelöst werden kann (Diagonalgestalt des Gleichungssystems):

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcl}
+64a & -32b & +16c & -8d & +4e & -2f & +1g & = & y_1 \\
-192a & +80b & -32c & +12d & -4e & +1f & & = & 0 \\
+480a & -160b & +48c & -12d & +2e & & & = & 0 \\
+64a & +32b & +16c & +8d & +4e & +2f & +1g & = & y_2 \\
+192a & +80b & +32c & +12d & +4e & +1f & & = & 0 \\
+480a & +160b & +48c & +12d & +2e & & & = & 0 \\
 & & & & & +1f & & = & 0
\end{array}
$$

Anfangstableau:

| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | \| | *R.S.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | -32 | 16 | -8 | 4 | -2 | 1 | \| | $y_1$ |
| -192 | 80 | -32 | 12 | -4 | 1 | 0 | \| | 0 |
| 480 | -160 | 48 | -12 | 2 | 0 | 0 | \| | 0 |
| 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | \| | $y_2$ |
| 192 | 80 | 32 | 12 | 4 | 1 | 0 | \| | 0 |
| 480 | 160 | 48 | 12 | 2 | 0 | 0 | \| | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | \| | 0 |

<u>1. Schritt</u>: 1*(2) + 3*(1) / 2*(3) - 15*(1) / 1*(4) - 1*(1) / 1*(5) - 3*(1) / 2*(6) - 15*(1) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | -32 | 16 | -8 | 4 | -2 | 1 | $y_1$ |
| 0 | -16 | 16 | -12 | 8 | -5 | 3 | $3y_1$ |
| 0 | 160 | -144 | 96 | -56 | 30 | -15 | $-15y_1$ |
| 0 | 64 | 0 | 16 | 0 | 4 | 0 | $y_2-y_1$ |
| 0 | 176 | -16 | 36 | -8 | 7 | -3 | $-3y_1$ |
| 0 | 800 | -144 | 144 | -56 | 30 | -15 | $-15y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

<u>2. Schritt</u>: -1*(1) + 2*(2) / 1*(3) + 10*(2) / 1*(4) + 4*(2) / 1*(5) + 11*(2) / 1*(6) + 50*(2) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -64 | 0 | 16 | -16 | 12 | -8 | 5 | $5y_1$ |
| 0 | -16 | 16 | -12 | 8 | -5 | 3 | $3y_1$ |
| 0 | 0 | 16 | -24 | 24 | -20 | 15 | $15y_1$ |
| 0 | 0 | 64 | -32 | 32 | -16 | 12 | $y_2+11y_1$ |
| 0 | 0 | 160 | -96 | 80 | -48 | 30 | $30y_1$ |
| 0 | 0 | 656 | -456 | 344 | -220 | 135 | $135y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

<u>3. Schritt</u>: 1*(1) - 1*(3) / 1*(2) - 1*(3) / 1*(4) - 4*(3) / 1*(5) - 10*(3) / 1*(6) - 41*(3) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -64 | 0 | 0 | 8 | -12 | 12 | -10 | $-10y_1$ |
| 0 | -16 | 0 | 12 | -16 | 15 | -12 | $-12y_1$ |
| 0 | 0 | 16 | -24 | 24 | -20 | 15 | $15y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 64 | -64 | 64 | -48 | $y_2-49y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 144 | -160 | 152 | -120 | $-120y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 528 | -640 | 600 | -480 | $-480y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

<u>4. Schritt</u>: 8*(1) - 1*(4) / 16*(2) - 3*(4) / 8*(3) + 3*(4) / 4*(5) - 9*(4) / 4*(6) - 33*(4) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -512 | 0 | 0 | 0 | -32 | 32 | -32 | $-y_2-31y_1$ |
| 0 | -256 | 0 | 0 | -64 | 48 | -48 | $-3y_2-45y_1$ |
| 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 32 | -24 | $3y_2-272y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 64 | -64 | 64 | -48 | $y_2-49y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 32 | -48 | $-9y_2-39y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -448 | 288 | -336 | $-33y_2-303y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

<u>5. Schritt</u>: -2*(1) + 1*(5) / -1*(2) + 1*(5) / -1*(4) + 1*(5) / -1*(6) + 7*(5) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1024 | 0 | 0 | 0 | 0 | -32 | 16 | $7y_2+23y_1$ |
| 0 | 256 | 0 | 0 | 0 | -16 | 0 | $-6y_2+6y_1$ |
| 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 32 | -24 | $3y_2+272y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | -32 | 0 | $-10y_2+10y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 32 | -48 | $-9y_2-39y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | $-30y_2+30y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

<u>6. Schritt</u>: -2*(1) + 1*(6) / -4*(2) + 1*(6) / 2*(3) + 1*(6) / -2*(4) + 1*(6) / 2*(5) + 1*(6) / 64*(7) + 1*(6) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2048 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -32 | $-44y_2-16y_1$ |
| 0 | -1024 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-6y_2+6y_1$ |
| 0 | 0 | 256 | 0 | 0 | 0 | -48 | $-24y_2+574y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 0 | $-10y_2+10y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -128 | 0 | -96 | $-48y_2-48y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | $-30y_2+30y_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-30y_2+30y_1$ |

Das lineare Gleichungssystem ist nur dann lösbar (mit unendlich vielen Lösungen), wenn die 7. Gleichung vom Typ 0 = 0 ist. Das bedeutet, dass

$-30y_2+30y_1 = 0 \Leftrightarrow 30y_1 = 30y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

gelten muss, d.h.: die Sattelpunkte $S_1(-2|y_1)$ und $S_2(2|y_2)$ liegen bzgl. der y-Achse symmetrisch zueinander. Aus $y_1 = y_2$ folgt weiter, dass die Unbekannten b, d, f des linearen Gleichungssystems verschwinden, d.h. es gilt: b = d = f = 0 und damit die Achsensymmetrie der Funktion f(x) zur y-Achse. Dieser Achsensymmetrie entspricht auch, dass der Funktionsgraph auf der y-Achse ein Extremum mit waagerechter Tangente besitzt.

IV. Im Falle der Achsensymmetrie der gesuchten Funktion f(x) zur y-Achse lässt sich, wenn als <u>Beispiel</u> die Sattelpunkte $S_1(-2|1)$ und $S_2(2|1)$ vorgegeben sind, das obige lineare Gleichungssystem wie folgt mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$
\begin{array}{l}
+\ 64a - 32b + 16c - 8d + 4e - 2f + 1g = 1 \\
-\ 192a + 80b - 32c + 12d - 4e + 1f = 0 \\
+\ 480a - 160b + 48c - 12d + 2e = 0 \\
+\ 64a + 32b + 16c + 8d + 4e + 2f + 1g = 1 \\
+\ 192a + 80b + 32c + 12d + 4e + 1f = 0 \\
+\ 480a + 160b + 48c + 12d + 2e = 0 \\
+\ 1f = 0
\end{array}
$$

<u>Anfangstableau</u>:

| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | \| | *R.S.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | -32 | 16 | -8 | 4 | -2 | 1 | \| | 1 |
| -192 | 80 | -32 | 12 | -4 | 1 | 0 | \| | 0 |
| 480 | -160 | 48 | -12 | 2 | 0 | 0 | \| | 0 |
| 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | \| | 1 |
| 192 | 80 | 32 | 12 | 4 | 1 | 0 | \| | 0 |
| 480 | 160 | 48 | 12 | 2 | 0 | 0 | \| | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | \| | 0 |

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 3*(*1*) / 2*(*3*) - 15*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*) / 1*(*5*) - 3*(*1*) / 2*(*6*) - 15*(*1*) /

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | -32 | 16 | -8 | 4 | -2 | 1 | \| | 1 |
| 0 | -16 | 16 | -12 | 8 | -5 | 3 | \| | 3 |
| 0 | 160 | -144 | 96 | -56 | 30 | -15 | \| | -15 |
| 0 | 64 | 0 | 16 | 0 | 4 | 0 | \| | 0 |
| 0 | 176 | -16 | 36 | -8 | 7 | -3 | \| | -3 |
| 0 | 800 | -144 | 144 | -56 | 30 | -15 | \| | -15 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | \| | 0 |

<u>2. Schritt</u>: -1*(*1*) + 2*(*2*) / 1*(*3*) + 10*(*2*) / 1*(*4*) + 4*(*2*) / 1*(*5*) + 11*(*2*) / 1*(*6*) + 50*(*2*) /

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -64 | 0 | 16 | -16 | 12 | -8 | 5 | \| | 5 |
| 0 | -16 | 16 | -12 | 8 | -5 | 3 | \| | 3 |
| 0 | 0 | 16 | -24 | 24 | -20 | 15 | \| | 15 |
| 0 | 0 | 64 | -32 | 32 | -16 | 12 | \| | 12 |
| 0 | 0 | 160 | -96 | 80 | -48 | 30 | \| | 30 |
| 0 | 0 | 656 | -456 | 344 | -220 | 135 | \| | 135 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | \| | 0 |

3. Schritt: 1*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*2*) - 1*(*3*) / 1*(*4*) - 4*(*3*) / 1*(*5*) - 10*(*3*) / 1*(*6*) - 41*(*3*) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -64 | 0 | 0 | 8 | -12 | 12 | -10 | -10 |
| 0 | -16 | 0 | 12 | -16 | 15 | -12 | -12 |
| 0 | 0 | 16 | -24 | 24 | -20 | 15 | 15 |
| 0 | 0 | 0 | 64 | -64 | 64 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 0 | 144 | -160 | 152 | -120 | -120 |
| 0 | 0 | 0 | 528 | -640 | 600 | -480 | -480 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

4. Schritt: 8*(*1*) - 1*(*4*) / 16*(*2*) - 3*(*4*) / 8*(*3*) + 3*(*4*) / 4*(*5*) - 9*(*4*) / 4*(*6*) - 33*(*4*) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -512 | 0 | 0 | 0 | -32 | 32 | -32 | -32 |
| 0 | -256 | 0 | 0 | -64 | 48 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 32 | -24 | -24 |
| 0 | 0 | 0 | 64 | -64 | 64 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 32 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -448 | 288 | -336 | -336 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

5. Schritt: -2*(*1*) + 1*(*5*) / -1*(*2*) + 1*(*5*) / -1*(*4*) + 1*(*5*) / -1*(*6*) + 7*(*5*) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1024 | 0 | 0 | 0 | 0 | -32 | 16 | 16 |
| 0 | 256 | 0 | 0 | 0 | -16 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 32 | -24 | -24 |
| 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | -32 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 32 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

6. Schritt: -2*(*1*) + 1*(*6*) / -4*(*2*) + 1*(*6*) / 2*(*3*) + 1*(*6*) / -2*(*4*) + 1*(*6*) / 2*(*5*) + 1*(*6*) / 64*(*7*) + 1*(*6*) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2048 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -32 | -32 |
| 0 | -1024 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 256 | 0 | 0 | 0 | -48 | -48 |
| 0 | 0 | 0 | 128 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -128 | 0 | -96 | -96 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -64 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Teilen: (*1*):(-2048) / (*2*):(-1024) / (*3*):256 / (*4*):128 / (*5*):(-128) / (*6*):(-64) /

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.015625 | 0.015625 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0.1875 | -0.1875 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.75 | 0.75 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lcl}
+\ 1a & + & 0.015625g = 0.015625 \\
+\ 1b & & = 0 \\
+\ 1c & - & 0.1875g = -0.1875 \\
+\ 1d & & = 0 \\
+\ 1e & + & 0.75g = 0.75 \\
+\ 1f & & = 0 \\
 & & 0 = 0
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$g = \kappa$
$a = 0.015625 - 0.015625\kappa$
$b = 0$
$c = -0.1875 + 0.1875\kappa$
$d = 0$
$e = 0.75 - 0.75\kappa$
$f = 0$
(mit Parameter κ)

Mit der Wahl des Parameters als κ = 0 ergibt sich als eine der gesuchten Funktionen:
$f(x) = x^6/64 – 3x^4/16 + 0,75x^2$.

V. Auf Grund der y-Achsensymmetrie der gesuchten Funktionen f(x) lassen sich mit dem Ansatz:
$f(x) = ax^6 + cx^4 + ex^2 + g$
$f'(x) = 6ax^5 + 4cx^3 + 2ex$
$f''(x) = 30ax^4 + 12cx^2 + 2e$
lineares Gleichungssystem und Gauß-Verfahren vereinfachen zu:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 64a + 16c + 4e + 1g = 1$$
$$+ 192a + 32c + 4e = 0$$
$$+ 480a + 48c + 2e = 0$$

Anfangstableau:

| a | c | e | g | \| | R.S. |
|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 16 | 4 | 1 | \| | 1 |
| 192 | 32 | 4 | 0 | \| | 0 |
| 480 | 48 | 2 | 0 | \| | -0 |

1. Schritt: 1*(*2*) - 3*(*1*) / 2*(*3*) - 15*(*1*) /

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 16 | 4 | 1 | \| | 1 |
| 0 | -16 | -8 | -3 | \| | -3 |
| 0 | -144 | -56 | -15 | \| | -15 |

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 9*(*2*) /

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 0 | -4 | -2 | \| | -2 |
| 0 | -16 | -8 | -3 | \| | -3 |
| 0 | 0 | -16 | -12 | \| | -12 |

3. Schritt: -4*(*1*) + 1*(*3*) / -2*(*2*) + 1*(*3*) /

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -256 | 0 | 0 | -4 | \| | -4 |
| 0 | 32 | 0 | -6 | \| | -6 |
| 0 | 0 | -16 | -12 | \| | -12 |

Teilen: (*1*):(-256) / (*2*):32 / (*3*):(-16) /

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0.015625 | \| | 0 |
| 0 | 1 | 0 | -0.1875 | \| | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0.75 | \| | 0 |

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 1a + 0.015625g = 0.015625$$
$$+ 1c - 0.1875g = -0.1875$$
$$+ 1e + 0.75g = 0.75$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$g = \delta$
$a = 0.015625 - 0.015625\delta$
$c = -0.1875 + 0.1875\delta$
$e = 0.75 - 0.75\delta$
(mit Parameter δ)

Die Wahl von $\delta = 0$ führt auf die Funktion $f(x) = x^6/64 - 3x^4/16 + 0{,}75x^2$.

VI. Wegen der y-Achsensymmetrie der gesuchten Funktionen f(x) lassen sich diese auch über die Linearfaktorzerlegung ganz rationaler Funktionen herleiten. Wir bestimmen zunächst eine ganz rationale, zur y-Achse symmetrische Funktion h(x), deren Sattelpunkte an den Stellen $x = \pm 2$ Nullstellen der Funktion sind. Die Sattelpunkte $S_1(-2|0)$ und $S_2(2|0)$ stellen dreifache Nullstellen dar, so dass für h(x) die folgende Linearfaktorzerlegung (mit Verwendung der 3. binomischen Formel) greift:

$h(x) = (x+2)^3(x-2)^3 = [(x+2)(x-2)]^3 = (x^2-4)^3$.

Die Funktion ist ganz rational vom Grad 6 und zudem zur y-Achse symmetrisch, da der Term $x^2-4$ achsensymmetrisch ist und das Produkt $(x^2-4)^3$ aus achsensymmetrischen Funktionen wieder symmetrisch zur y-Achse ist. Alle ganz rationalen, zur y-Achse symmetrischen Funktionen f(x) mit Sattelpunkten $x = \pm 2$ lassen sich folglich als entlang der y-Achse verschobene, (gestreckte, gestauchte, gespiegelte) Vielfache der Funktion h(x) auffassen:

$f(x) = \alpha \cdot h(x) + \gamma = \alpha(x^2-4)^3 + \gamma$.

Wird $\alpha = 1/64$ und $\gamma = 1$ gewählt, so erhalten wir:

$f(x) = (x^2-4)^3/64 + 1 = (x^6-12x^4+48x^2-64)/64 + 1 = x^6/64 - 3x^4/16 + 0{,}75x^2 - 1 + 1$
$= x^6/64 - 3x^4/16 + 0{,}75x^2$

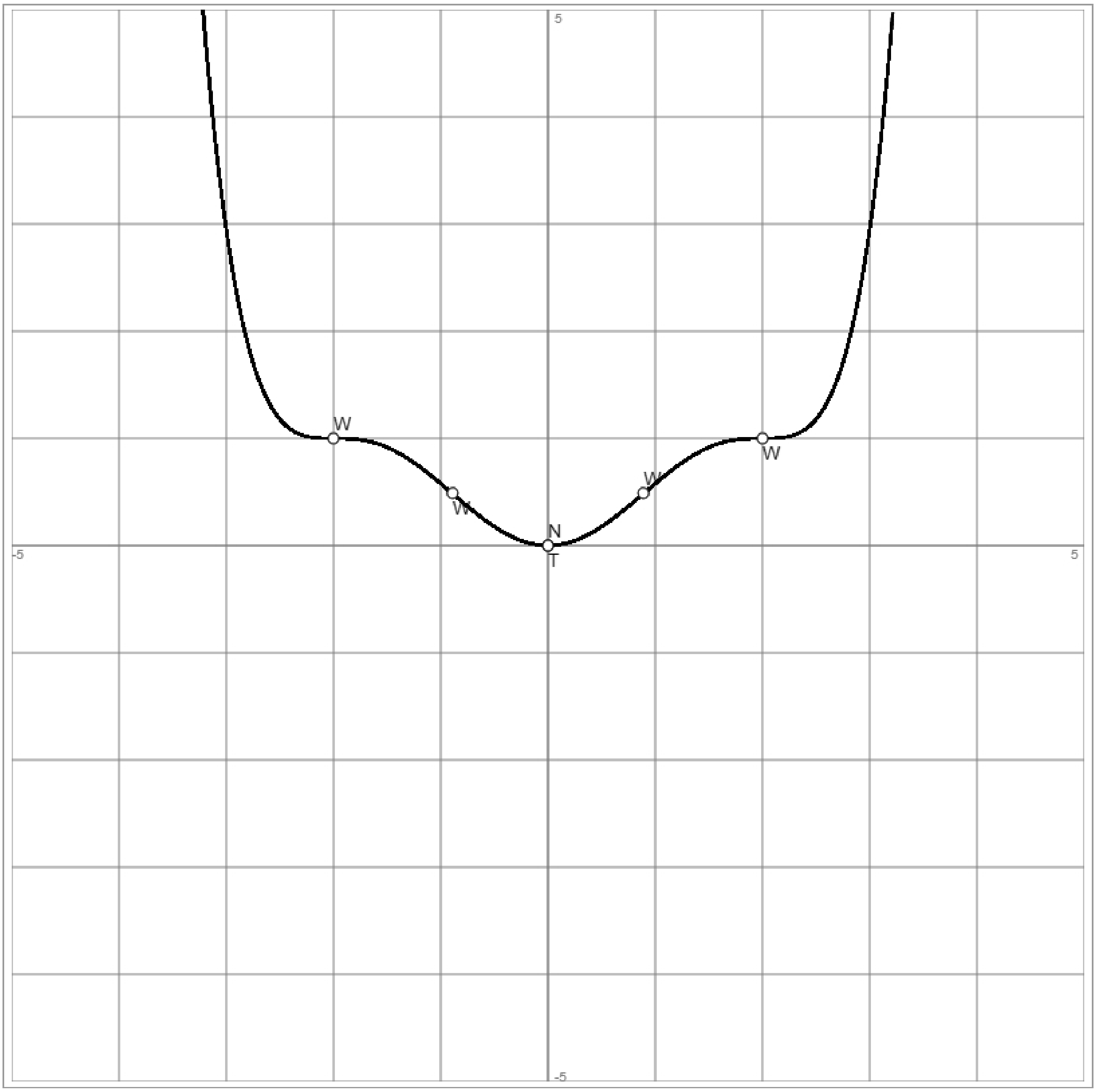
mit den Sattelpunkten $S_1(-2|1)$ und $S_2(2|1)$.

VII. <u>Wertetabelle, Graph</u>: $f(x) = x^6/64 - 3x^4/16 + 0{,}75x^2$

**Wertetabelle:**

| x | f(x) | f'(x) | f''(x) | Besondere Kurvenpunkte |
|---|---|---|---|---|
| -5 | 145.7031 | -206.72 | 238.22 | |
| -4.5 | 68.0471 | -111.4 | 148.16 | |
| -4 | 28 | -54 | 85.5 | |
| -3.5 | 9.7737 | -22.33 | 44.28 | |
| -3 | 2.9531 | -7.03 | 19.22 | |
| -2.5 | 1.178 | -1.19 | 5.75 | |
| -2 | 1 | 0 | 0 | Wendepunkt W(-2\|1) = Sattelpunkt S(-2\|1) |
| -1.5 | 0.9163 | -0.43 | -1.19 | |
| -1 | 0.5781 | -0.84 | -0.28 | |
| -0.9 | 0.4928 | -0.86 | -0.01 | Wendepunkt W(-0.9\|0.49) |
| -0.5 | 0.176 | -0.66 | 0.97 | |
| 0 | 0 | 0 | 1.5 | Nullstelle N(0\|0) = Schnittpunkt $S_y$(0\|0) = Tiefpunkt T(0\|0) |
| 0.5 | 0.176 | 0.66 | 0.97 | |
| 0.89 | 0.4842 | 0.86 | 0.01 | Wendepunkt W(0.89\|0.48) |
| 1 | 0.5781 | 0.84 | -0.28 | |
| 1.5 | 0.9163 | 0.43 | -1.19 | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | Wendepunkt W(2\|1) = Sattelpunkt S(2\|1) |
| 2.5 | 1.178 | 1.19 | 5.75 | |
| 3 | 2.9531 | 7.03 | 19.22 | |
| 3.5 | 9.7737 | 22.33 | 44.28 | |
| 4 | 28 | 54 | 85.5 | |
| 4.5 | 68.0471 | 111.4 | 148.16 | |
| 5 | 145.7031 | 206.72 | 238.22 | |

**Graph:**




www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1767