Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Biquadratische Gleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{3}x^4 + x^2 - 36 = 0\,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von biquadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, genügen. Vermöge der Substitution $u = x^2$ folgt aus (*) die quadratische Gleichung $au^2 + bu + c = 0$ (**). Die Lösung der quadratischen Gleichung (**) ist dann: $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Rücksubstitution $x^2 = u$ liefert somit die Gleichungen: $x^2 = u_1$, $x^2 = u_2$, aus denen sich durch Ziehen der Wurzel die 0 bis 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.
Um eine biquadratische Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind eventuell noch Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen.

II. Wir bringen die Gleichung durch Substitution in die Form $au^2 + bu + c = 0$, lösen die quadratische Gleichung mit der a-b-c-Formel und führen die Rücksubstitution durch:

$\frac{1}{3}x^4 + x^2 - 36 = 0$	$\mid \cdot 3$
$x^4 + 3x^2 - 108 = 0$	(Substitution: $u = x^2$)
$u^2 + 3u - 108 = 0$	(a-b-c-Formel: a = 1, b = 3, c = -108)
$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108)}}{2 \cdot 1}$	(Ausrechnen)
$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2}$	(Wurzel ausrechnen)
$u_{1,2} = \frac{-3 \pm 21}{2}$	(Lösungen u_1, u_2)
$u_1 = \frac{-3+21}{2} = \frac{18}{2} = 9$, $u_2 = \frac{-3-21}{2} = \frac{-24}{2} = -12$	(Rücksubstitution: $x^2 = u$)
$x^2 = 9$, $x^2 = -12$	$\mid \sqrt{}$
$x = \pm 3$, (keine Lösung)	

Wir erhalten $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ als Lösungen; Lösungsmenge ist also: L = {-3; 3}.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1137