Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Biquadratische Gleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$x^4 + \frac{4}{5}x^2 = -1.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von biquadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, genügen. Vermöge der Substitution $z = x^2$ folgt aus (*) die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ (**). Die Lösung der quadratischen Gleichung (**) ist dann: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Rücksubstitution $x^2 = z$ liefert somit die Gleichungen: $x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$, aus denen sich durch Ziehen der Wurzel die 0 bis 4 Lösungen der biquadratischen Gleichung ergeben.
Um eine biquadratische Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind eventuell noch Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen.

II. Wir bringen die Gleichung durch Substitution in die Form $az^2 + bz + c = 0$, lösen die quadratische Gleichung mit der a-b-c-Formel und führen die Rücksubstitution durch:

$x^4 + \frac{4}{5}x^2 = -1$	$\mid \cdot 5$
$5x^4 + 4x^2 = -5$	$\mid +5$
$5x^4 + 4x^2 + 5 = 0$	(Substitution: $z = x^2$)
$5z^2 + 4z + 5 = 0$	(a-b-c-Formel: a = 5, b = 4, c = 5)
$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$	(Ausrechnen)
$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-84}}{10}$	(Radikand ist negativ)
(keine Lösung)	

Wir erhalten keine Lösung; die Lösungsmenge ist leer mit: L = {}.

2. Lösung: Betrachten wir die Gleichung $x^4 + \frac{4}{5}x^2 = -1$, so haben wir auf der linken Seite der Gleichung wegen $x^4 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ und der Summe nur nicht negative Zahlen $x^4+0,8x^2$ vorliegen, während die rechte Seite der Gleichung -1, also negativ ist. Von daher kann es keine Lösungen geben; die Lösungsmenge ist: L = {}.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1140