Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Bernoullische Differenzialgleichung

Aufgabe: Löse die lineare Bernoullische Differenzialgleichung:

$$y' = (1+x^2y)xy \text{ , } y(0) = 1.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(x)y + g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{\int f(x)dx} \text{ ,}$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} dx \cdot e^{\int f(x)dx} + C \cdot e^{\int f(x)dx} .$$

II. Die Bernoullische Differenzialgleichung ist von der Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^r \text{ , } r \neq 0, r \neq 1.$$

Division mit y^r und Substitution ergeben:

$y' = f(x)y + g(x)y^r$ | $:y^r$

$\frac{y'}{y^r} = f(x)y^{r-1} + g(x)$ (Substitution: $z = y^{1-r}$, $z' = (1-r)y^{-r}y' = (1-r)y'/y^r$ [Kettenregel])

$\frac{z'}{1-r} = f(x)z + g(x)$ | $\cdot(1-r)$

$z' = (1-r)\left(f(x)z + g(x)\right)$

und damit eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung. Die Substitution führt noch auf die Beziehungen:

$$z = y^{1-r} \Leftrightarrow y = \sqrt[1-r]{z} \text{ , } y(x_0) = \sqrt[1-r]{z(x_0)}$$

u.a. bei vorgegebener Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

III. Die Bernoullische Differenzialgleichung: $y' = (1+x^2y)xy$ lässt sich durch Ausmultiplizieren schreiben als: $y' = xy + x^3y^2$ (mit den Funktionen f(x) = x, g(x) = x^3). Die daraus folgende lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat vermöge der Substitution $z = y^{1-2} = y^{-1}$ die Form:

$z' = (-1)\left(xz + x^3\right) = -xz - x^3$,

so dass die Lösung:

$z = -\int x^3 \cdot e^{\int xdx} dx \cdot e^{\int -xdx} + C \cdot e^{-\int xdx}$

greift. Wir betrachten zunächst das Integral $\int x^3 \cdot e^{\int xdx} dx$ und haben mit Produktintegration und <u>Substitution</u>:

$$\int x^3 \cdot e^{\int xdx} dx = \int x^3 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx = \int x^2 \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx \underset{\left\{ \begin{smallmatrix} u=x^2, u'=2x \\ v'=xe^{\frac{1}{2}x^2}, v=e^{\frac{1}{2}x^2} \end{smallmatrix} \right\}}{=} x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - \int 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx =$$

$$x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx \underset{\left\{ z=\frac{1}{2}x^2, z'=x \right\}}{=} x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} = (x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Wegen $e^{-\int xdx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist die Lösung z:

$$z = -(x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = -(x^2-2) + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

mit homogenen Anteil $C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ und inhomogenen Anteil $-(x^2-2)$. <u>Rücksubstitution</u> ergibt wegen $z = y^{-1} \Leftrightarrow y = z^{-1}$:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-(x^2-2) + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}.$$

IV. Wir bestimmen noch auf Grund der Anfangsbedingung y(0) = 1 die Konstante C. Es gilt:

$$y(0) = \frac{1}{-(0^2-2) + C \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2}} = \frac{1}{2+C} = 1 \Leftrightarrow 1 = 2+C \Leftrightarrow C = -1.$$

Die gesuchte <u>Lösung</u> der Differenzialgleichung lautet damit:

$$y = \frac{1}{-(x^2-2) - e^{-\frac{1}{2}x^2}} = -\frac{1}{(x^2-2) + e^{-\frac{1}{2}x^2}}.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1525