**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Differenzialgleichungen
## > linear, 1. Ordnung

---

**Aufgabe**: Löse die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y'+x^2 y = x^2 .$$

**Lösung**: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y'+f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx} ,$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx} .$$

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'+x^2 y = 0$ bestimmt sich als:

$$y = C \cdot e^{-\int x^2 dx} = C \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Die spezielle Lösung lautet:

$$y = \int x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} dx \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = 1 .$$

Die Lösung des Integrals $\int x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} dx$ erfolgt dabei mittels Substitution $z = \frac{x^3}{3}$, $z' = \frac{dz}{dx} = x^2$ =>

$dz = x^2 dx$, so dass gilt: $\int x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} dx = \int e^z dz = e^z = e^{\frac{x^3}{3}}$ .

Die Gesamtlösung der Differenzialgleichung ergibt sich dann als Summe von allgemeiner und spezieller Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 .$$

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 115