Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + 2y = e^x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differenzialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die homogene Lösung: $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(x) = e^{cx}$ als Exponentialfunktion und falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{cx}$, falls $c=\lambda_i$ für ein gewisses i=1, … n eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Axe^{cx}$ usw.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung y' + 2y = 0 bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit:

$y_h = C_1 e^{-2x}$.

III. Für die Inhomogenität $g(x) = e^x$ ergibt sich der Ansatz:

$y_p = Ae^x$,

da $g(x) = e^x$ nicht Teil der homogenen Lösung $y = C_1 e^{-2x}$ ist. Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = Ae^x$ auf:

$Ae^x + 2Ae^x = e^x \Leftrightarrow 3Ae^x = e^x$,

so dass gilt:

$3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$,

also:

$y_p = \frac{1}{3} e^x$.

IV. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = C_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1389