

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + 2y = x^2 + x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differenzialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $g(x)$ als Störfunktion. Ist $g(x) = 0$, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die homogene Lösung: $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion $g(x)$ durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem $g(x)$ vom Grad n und falls $\lambda=0$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + \dots + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + 2y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit:

$$y_h = C_1 e^{-2x}.$$

III. Für die Inhomogenität $g(x) = x^2 + x$ (ganz rationale Funktion vom Grad 2) ergibt sich als Ansatz:

$$y_p = A + Bx + Cx^2.$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = B + 2Cx$ auf:

$$B + 2Cx + 2(A+Bx+Cx^2) = x^2 + x \Leftrightarrow (2A+B) + (B+2C)x + 2Cx^2 = 0 + 1x + 1x^2,$$

so dass gemäß Koeffizientenvergleich das folgende lineare Gleichungssystem greift:

$$2A + B = 0$$

$$B + 2C = 1$$

$$2C = 1.$$

Wir rechnen: $2C = 1 \Rightarrow C = 0,5$, weiter: $B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$ sowie: $2A + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$. Als Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ergibt sich:

$$y_p = 0,5x^2.$$

IV. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-2x} + 0,5x^2.$$