

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt lineare Differenzialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Differenzialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Treten paarweise verschiedene komplexe Lösungen als Lösungen der charakteristischen Gleichung (*) auf, so ist mit zwei zueinander konjugierten Lösungen $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$ zudem: $y = \dots + e^{\alpha x} (C_i \cos(\beta x) + C_{i+1} \sin(\beta x)) + \dots$ für gewisse $i = 1, \dots, n-1$.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 13y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2-3i, \lambda = -2+3i.$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)).$$