Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 8e^x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt <u>lineare Differenzialgleichung</u> n. Ordnung <u>mit konstanten Koeffizienten</u> und g(t) als Störfunktion. Ist g(t) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt <u>charakteristische Gleichung</u> der Differenzialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die homogene Lösung: $y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + ... + C_ne^{\lambda_n x}$. Tritt eine Lösung λ_i mit Vielfachheit m_i auf, so gilt: $y_h = ... + (C_{i0} + C_{i1}x + ... + C_{im_i}x^{m_i-1})e^{\lambda_i x} + ...$ für gewisse i = 1, … n. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(t) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(x) = ae^{cx}$ als Exponentialfunktion und falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{cx}$, falls $c=\lambda_i$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung mit der Vielfachheit m_i ist: $y_p = Ax^{m_i}e^{cx}$.

II. Die Lösung der <u>homogenen Differenzialgleichung</u> $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = 0$.

Eine Lösung der Gleichung ist: $\lambda = 1$, so dass zweimalige Polynomdivision ergibt:

$(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1):(\lambda-1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1):(\lambda-1) = \lambda^2 - 1$.

Die quadratische Gleichung:

$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

führt auf die Lösungen: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, so dass mit $\lambda = 1$ eine dreifache, mit $\lambda = -1$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung vorliegt. Demgemäß ergibt sich als der homogenen Differenzialgleichung:

$y = C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2)e^x$.

III. Für die Inhomogenität $g(x) = 8e^x$ ergibt sich wegen der Vielfachheit 3 bei der Lösung $\lambda = 1$ der charakteristischen Gleichung der Ansatz:

$y_p = Ax^3e^x$,

da $g(x) = e^x$ Teil der homogenen Lösung y ist. Einsetzen in die <u>inhomogene Differenzialgleichung</u> führt wegen:

$y_p' = A(3x^2+x^3)e^x$,
$y_p'' = A(6x+6x^2+x^3)e^x$,
$y_p''' = A(6+18x+9x^2+x^3)e^x$,
$y_p^{(4)} = A(24+36x+12x^2+x^3)e^x$

auf:

$A(24+36x+12x^2+x^3)e^x - 2A(6+18x+9x^2+x^3)e^x + 2A(3x^2+x^3)e^x - Ax^3e^x = 8e^x$,

so dass nach dem Einsetzen von x=0 ergibt:

$24A - 12A = 8 \Leftrightarrow 12A = 8 \Leftrightarrow A = 2/3$.

Damit ist die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$y_p = \frac{2}{3}x^3e^x$.

IV. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet also:

$y = C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2)e^x + \frac{2}{3}x^3e^x = C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$.

V. Wir führen noch die Probe durch und haben:

$y = C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$y' = -C_1e^{-x} + (C_{22}+2C_{23}x+2x^2)e^x + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$= -C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}+(C_{22}+2C_{23})x+(C_{23}+2)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$y'' = C_1e^{-x} + (C_{22}+2C_{23}+(2C_{23}+4)x+2x^2)e^x + (C_{21}+C_{22}+(C_{22}+2C_{23})x+(C_{23}+2)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$= C_1e^{-x} + (C_{21}+2C_{22}+2C_{23}+(C_{22}+4C_{23}+4)x+(C_{23}+4)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$y''' = -C_1e^{-x} + (C_{22}+4C_{23}+4+(2C_{23}+8)x+2x^2)e^x + (C_{21}+2C_{22}+2C_{23}+(C_{22}+4C_{23}+4)x+(C_{23}+4)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x =$

$= -C_1e^{-x} + (C_{21}+3C_{22}+6C_{23}+4+(C_{22}+6C_{23}+12)x+(C_{23}+6)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$y^{(4)} = C_1e^{-x}$

$+ (C_{22}+6C_{23}+12+(2C_{23}+12)x+2x^2)e^x + (C_{21}+3C_{22}+6C_{23}+4+(C_{22}+6C_{23}+12)x+(C_{23}+6)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$= C_1e^{-x} + (C_{21}+4C_{22}+12C_{23}+16+(C_{22}+8C_{23}+24)x+(C_{23}+8)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$,

so dass in der Tat:

$y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y =$

$C_1e^{-x} + (C_{21}+4C_{22}+12C_{23}+16+(C_{22}+8C_{23}+24)x+(C_{23}+8)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x$

$- 2(-C_1e^{-x} + (C_{21}+3C_{22}+6C_{23}+4+(C_{22}+6C_{23}+12)x+(C_{23}+6)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x)$

$+ 2(-C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}+(C_{22}+2C_{23})x+(C_{23}+2)x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x)$

$- (C_1e^{-x} + (C_{21}+C_{22}x+C_{23}x^2+\frac{2}{3}x^3)e^x) =$

$(C_1+2C_1-2C_1-C_1)e^{-x}$

$+ ((C_{21}-2C_{21}+2C_{21}-C_{21}+4C_{22}-6C_{22}+2C_{22}+12C_{23}-12C_{23}+16-8)$

$+ (C_{22}-2C_{22}+2C_{22}-C_{22}+8C_{23}-12C_{23}+4C_{23}+24-24)x$

$+ (C_{23}-2C_{23}+2C_{23}-C_{23}+8-12+4)x^2 + (\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3})x^3)e^x =$

$0 + (8+0x+0x^2+0x^3)e^x = 8e^x$.