**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Differenzialgleichungen
## > Lineares Differenzialgleichungssystem

---

**Aufgabe**: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen $y_1$, $y_2$.

a) Bestimme die allgemeinen Lösungen $y_1$, $y_2$ des Differenzialgleichungssystems (*).

b) Wie lauten die Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*), wenn die Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$ gelten?

c) Das Differenzialgleichungssystem wird nun um einen inhomogenen Anteil erweitert und lautet:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + 2x - 1 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (**).$$

Bestimme nun die Lösungen $y_1$, $y_2$ des Differenzialgleichungssystems (**).

**1. Lösung**: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit zwei Funktionen $y_1$, $y_2$ und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Mit der charakteristischen Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

und deren Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$ hat das homogene Differenzialgleichungssystem die Lösungen:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \text{ (falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell)}$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} \text{ (falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell)}$$

$$y_1 = e^{ax}\left(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)\right) \text{ (falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex)}$$

sowie:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1\right).$$

II. a) Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

die charakterische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-2\cdot 3 = 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-6 = \lambda^2-3\lambda-4 = 0\ ,$$

so dass

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ (pq-Formel: p=-3, q=-4)

$$\lambda_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2+4} = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 \pm 2{,}5$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$

gilt und damit der Fall verschiedener reeller Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$. Die Funktion $y_1$ ergibt sich als Lösung aus:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}$$

mit beliebigen reellen Zahlen $C_1$, $C_2$ (als Integrationskonstanten). Die Funktion $y_2$ lautet dann auf Grund von $y_1' = -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}$

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1) = \frac{1}{2}\left(\left(-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}\right) - \left(C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-2C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 e^{4x}\right) =$$

$$-C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x}.$$

b) Bei den gegebenen Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 1$ sind noch zusätzlich zu den allgemeinen Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*) die Konstanten $C_1$ und $C_2$ zu ermitteln. Dies geschieht über ein lineares Gleichungssystem auf Grund von:

$y_1(0) = C_1+C_2 = 2$, $y_2(0) = -C_1+1{,}5C_2 = 1$

und:

$C_2 = 2-C_1 \Rightarrow -C_1+1{,}5(2-C_1) = -C_1+3-1{,}5C_1 = 3-2{,}5C_1 = 1 \Rightarrow -2{,}5C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = 0{,}8$
$C_1 = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}8+C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1{,}2$.

Wir haben damit:

$$y_1 = 0{,}8 \cdot e^{-x} + 1{,}2 \cdot e^{4x}$$

$$y_2 = -0{,}8 \cdot e^{-x} + 1{,}8 \cdot e^{4x}$$

als Lösungsfunktionen des Differenzialgleichungssystems mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen.

c) Erweitert sich das homogene Differenzialgleichungssystem (*) zu dem inhomogenen Differenzialgleichungssystem (**), so sind zusätzlich zu den Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems partikuläre Lösungen zu finden. So sei nun:

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + 2x - 1$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

mit dem inhomogenen Anteil $g_1(x) = 2x-1$ (bei $g_2(x) = 0$). Es gilt dann der Ansatz für Polynome, wonach als partikuläre Lösungen Lösungen vom Typ $y_{1p} = ax+b$, $y_{2p} = cx+d$ zu finden sind. Damit gilt wegen $y_{1p}' = a$, $y_{2p}' = c$ und durch Einsetzen in die Gleichungen des Differenzialgleichungssystems:

$a = (ax+b) + 2(cx+d) + 2x-1 \Rightarrow ax + 2cx - a + b + 2d = -2x+1 \Rightarrow (a+2c)x + (-a+b+2d) = -2x+1$
$c = 3(ax+b) + 2(cx+d) \Rightarrow 3ax + 2cx + 3b - c + 2d = 0 \Rightarrow (3a+2c)x + (3b-c+2d) = 0$

Koeffizientenvergleich ergibt zunächst:

$a+2c = -2$; $-a+b+2d = 1$; $3a+2c = 0$; $3b-c+2d = 0$.

Das lineare Gleichungssystem der Gleichungen $a+2c = -2$ und $3a+2c = 0$ führt nach Gleichungssubtraktion auf: $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$, so dass sich ergibt: $1+2c = -2 \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = -1{,}5$. Das Gleichungssystem der Gleichungen $-a+b+2d = 1$ und $3b-c+2d = 0$ führt nach Einsetzen von $a=1$ und $c=-1{,}5$ auf:

$-1+b+2d = 1 \Rightarrow b+2d = 2$; $3b+1{,}5+2d = 0 \Rightarrow 3b+2d = -1{,}5$

und damit nach Gleichungssubtraktion auf: $-2b = 3{,}5 \Rightarrow b = -1{,}75$, so dass folgt: $-1{,}75+2d = 2 \Rightarrow 2d = 3{,}75 \Rightarrow d = 1{,}875$. Als partikuläre Lösungen erhalten wir damit:

$y_{1p} = x-1{,}75$

$y_{2p}$ = -1,5x+1,875.

Die Gesamtlösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems (**) lautet also:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + x - 1{,}75$$

$$y_2 = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2} C_2 e^{4x} - 1{,}5x + 1{,}875.$$

**2. Lösung**: Allgemein gilt: Ein <u>lineares inhomogenes Differenzialgleichungssystem</u> 1. Ordnung mit zwei Funktionen $y_1$, $y_2$ und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{g}$$

mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Eliminierung der Funktion $y_2$ im Differenzialgleichungssystem ergibt die nur noch von $y_1$ abhängige inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = g^*(x)$$

mit: $a = -a_{11}–a_{22}$, $b = \det(A) = a_{11}a_{22}–a_{12}a_{21}$, $g^*(x) = g_1'(x) – (a_{22}g_1(x)–a_{12}g_2(x))$. Die homogene Differenzialgleichung $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ ist dann lösbar über die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

und deren Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$, so dass $y_1$ die Form hat:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + y_{1p} \text{ (falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell)}$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} + y_{1p} \text{ (falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell)}$$

$$y_1 = e^{ax}\left(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)\right) + y_{1p} \text{ (falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex)}$$

mit der partikulären Lösung $y_{1p}$ der inhomogenen Differenzialgleichung. Für die zweite Funktion $y_2$ des Differenzialgleichungssystems gilt:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)\right).$$

II. a) Zum linearen Differenzialgleichungssystem (*) lautet die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Eliminierung der Funktion $y_2$ führt mit: a = -1–2 = -3 und b = 1·2–2·3 = -4 zur (ebenso homogenen) Differenzialgleichung:

$y_1'' – 3y_1' – 4y = 0$.

Die zur Differenzialgleichung gehörende charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2–3\lambda–4 = 0$

so dass

$\lambda^2–3\lambda–4 = 0$ (pq-Formel: p=-3, q=-4)

$$\lambda_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 \pm 2{,}5$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$

gilt und damit der Fall verschiedener reeller Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$. Die Funktion $y_1$ ergibt sich als Lösung aus:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}$$

mit beliebigen reellen Zahlen $C_1$, $C_2$ (als Integrationskonstanten). Die Funktion $y_2$ lautet dann auf Grund von $y_1' = -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}$

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1) = \frac{1}{2}\left(\left(-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}\right) - \left(C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-2C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 e^{4x}\right) =$$

$$-C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x}.$$

b) Bei den gegebenen Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 1$ sind noch zusätzlich zu den allgemeinen Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*) die Konstanten $C_1$ und $C_2$ zu ermitteln. Dies geschieht über ein lineares Gleichungssystem auf Grund von:

$y_1(0) = C_1+C_2 = 2$, $y_2(0) = -C_1+1{,}5C_2 = 1$

und:

$C_2 = 2–C_1 \Rightarrow -C_1+1{,}5(2–C_1) = -C_1+ 3 –1{,}5C_1 = 3–2{,}5C_1 = 1 \Rightarrow -2{,}5C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = 0{,}8$
$C_1 = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}8+ C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1{,}2$.

Wir haben damit:

$$y_1 = 0{,}8 \cdot e^{-x} + 1{,}2 \cdot e^{4x}$$
$$y_2 = -0{,}8 \cdot e^{-x} + 1{,}8 \cdot e^{4x}$$

als Lösungsfunktionen des Differenzialgleichungssystems mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen.

c) Erweitert sich das homogene Differenzialgleichungssystem (*) zu dem inhomogenen Differenzialgleichungssystem (**), so sind zusätzlich zu den Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems partikuläre Lösungen zu finden. So sei nun:

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + 2x - 1$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

mit dem inhomogenen Anteil $g_1(x) = 2x–1$ (bei $g_2(x) = 0$). Es gilt dann der Ansatz für Polynome, wonach als partikuläre Lösungen Lösungen vom Typ $y_{1p} = ax+b$, $y_{2p} = cx+d$ zu finden sind. Damit gilt wegen $y_{1p}' = a$, $y_{2p}' = c$ und durch Einsetzen in die Gleichungen des Differenzialgleichungssystems:

$a = (ax+b) + 2(cx+d) + 2x-1 \Rightarrow ax +2cx – a + b + 2d = -2x+1 \Rightarrow (a+2c)x + (-a+b+2d) = -2x+1$
$c = 3(ax+b) + 2(cx+d) \Rightarrow 3ax + 2cx + 3b – c + 2d = 0 \Rightarrow (3a+2c)x + (3b–c+2d) = 0$

Koeffizientenvergleich ergibt zunächst:

$a+2c = -2$; $-a+b+2d = 1$; $3a+2c = 0$; $3b–c+2d = 0$.

Das lineare Gleichungssystem der Gleichungen $a+2c = -2$ und $3a+2c = 0$ führt nach Gleichungssubtraktion auf: $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$, so dass sich ergibt: $1+2c = -2 \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c= -1{,}5$. Das Gleichungssystem der Gleichungen $-a+b+2d = 1$ und $3b–c+2d = 0$ führt nach Einsetzen von $a=1$ und $c=-1{,}5$ auf:

$-1+b+2d = 1 \Rightarrow b+2d = 2$; $3b+1{,}5+2d = 0 \Rightarrow 3b+2d = -1{,}5$

und damit nach Gleichungssubtraktion auf: $-2b = 3{,}5 \Rightarrow b = -1{,}75$, so dass folgt: $-1{,}75+2d = 2 \Rightarrow 2d = 3{,}75 \Rightarrow d = 1{,}875$. Als partikuläre Lösungen erhalten wir damit:

$y_{1p} = x–1{,}75$
$y_{2p} = -1{,}5x+1{,}875$.

Die Gesamtlösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems (**) lautet also:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + x - 1{,}75$$
$$y_2 = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x} - 1{,}5x + 1{,}875.$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 312