Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 8y_1 + 4y_2 \end{aligned} \quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2. Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).

Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Die charakteristische Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

führt auf reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, λ_2 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gehören Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ als Lösungen der linearen Gleichungssysteme:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}, \; (A-\lambda_2 E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Die Eigenvektoren führen auf das Fundamentalsystem $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1, \; e^{\lambda_2 x} \cdot \vec{x}_2\}$ und auf die Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot \vec{x}_2 \quad \text{(falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell)}$$

mit reellen C_1, C_2. Das Fundamentalsystem ist die Basis des Vektorraums der Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems.

II. Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3\cdot 8 = 8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 24 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

so dass

$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$ (pq-Formel: p=-6, q=-16)

$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$

gilt und damit der Fall verschiedener reeller Lösungen λ_1, λ_2 als Eigenwerte.

III. Zu den gefundenen Eigenwerten $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$ berechnen wir die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -2$: A + 2E = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ => $(A+2E) \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_1 = \vec{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 4x_{11} + 3x_{12} = 0$
$+\ 8x_{11} + 6x_{12} = 0$

Anfangstableau:

x_{11}	x_{12}	R.S.
4	3	0
8	6	0

1. Schritt: (2) - 2*(1) /

4	3	0
0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 4x_{11} + 3x_{12} = 0$
$0 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_{12} = t$
$x_{11} = 0 - 0{,}75t$

=> Eigenvektoren $\vec{x}_1 = t\begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahliger Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 8$: A – 8E = $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ => $(A-8E) \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$-\ 6x_{21} + 3x_{22} = 0$
$+\ 8x_{21} - 4x_{22} = 0$

Anfangstableau:

x_{21}	x_{22}	R.S.
-6	3	0
8	-4	0

1. Schritt: 3*(2) - 4*(1) /

-6	3	0
0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$-\ 6x_{21} + 3x_{22} = 0$
$0 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_{22} = t$
$x_{21} = 0 + 0{,}5t$

=> Eigenvektoren $\vec{x}_2 = t\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahliger Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

IV. Mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich der die Funktionen y_1, y_2 enthaltende Lösungsvektor:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{8x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so dass die gesuchten Funktionen
$y_1 = 3C_1e^{-2x} + C_2e^{8x}$,
$y_2 = -4C_1e^{-2x} + 2C_2e^{8x}$
lauten.

V. Wir führen noch die Probe durch. Es ist zunächst:
$y_1 = 3C_1e^{-2x} + C_2e^{8x} \Rightarrow y_1' = -6C_1e^{-2x} + 8C_2e^{8x}$,
$y_2 = -4C_1e^{-2x} + 2C_2e^{8x} \Rightarrow y_2' = 8C_1e^{-2x} + 16C_2e^{8x}$.
Damit gilt:
$2y_1 + 3y_2 = 2(3C_1e^{-2x} + C_2e^{8x}) + 3(-4C_1e^{-2x} + 2C_2e^{8x}) = 6C_1e^{-2x} + 6C_2e^{8x} – 12C_1e^{-2x} + 6C_2e^{8x} = -6C_1e^{-2x} + 8C_2e^{8x} = y_1'$,
$8y_1 + 4y_2 = 8(3C_1e^{-2x} + C_2e^{8x}) + 4(-4C_1e^{-2x} + 2C_2e^{8x}) = 24C_1e^{-2x} + 8C_2e^{8x} – 16C_1e^{-2x} + 8C_2e^{8x} = 8C_1e^{-2x} + 16C_2e^{8x} = y_2'$.

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1513