Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= 2y_2 \end{aligned} \quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2. Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).

Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Die charakteristische Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

führt auf reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, λ_2 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Sind $a_{11} = a_{22}$ und $a_{21} = 0$, so ist $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ reell und der einzige Eigenwert der Koeffizientenmatrix mit algebraischer Vielfachheit 2. Zum Eigenwert λ gehören die Eigen- bzw. Hauptvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$. Die Vektoren führen auf das Fundamentalsystem $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1,\ xe^{\lambda_2 x} \cdot \vec{x}_2\}$ bzw. $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1,\ e^{\lambda_2 x} \cdot (x \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2)\}$ und auf die Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \vec{x}_1 + C_2 \cdot xe^{\lambda x} \cdot \vec{x}_2 \quad \text{(falls } \lambda_1=\lambda_2=\lambda \text{ reell, } a_{11}=a_{22},\ a_{12}=a_{21}=0)$$

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \vec{x}_1 + C_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \left(x \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \right) \quad \text{(falls } \lambda_1=\lambda_2=\lambda \text{ reell, } a_{11}=a_{22},\ a_{12}\neq 0,\ a_{21}=0)$$

mit reellen C_1, C_2.

II. Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 5\cdot 0 = (2-\lambda)^2 = 0\,,$$

so dass

$(2\text{-}\lambda)^2 = 0$ | √
$2\text{-}\lambda = 0$ | $+\lambda$
$\lambda = 2$

gilt und damit der Fall einer reellen Lösung λ als <u>Eigenwert</u> (mit Vielfachheit 2).

III. Zum gefundenen Eigenwert λ = 2 berechnen wir die <u>Eigenvektoren</u>:

<u>λ = 2</u>: A – 2E = $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ => $(A-2E)\cdot \overset{->}{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \overset{->}{x_1} = \overset{->}{0}$ => x_{11} = t, x_{12} = 0

=> Eigenvektoren $\overset{->}{x_1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahliger Eigenvektor $\overset{->}{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts ist 2, die Dimension des Eigenraums 1. Daher ist als weiterer Vektor auf Grund von $(A-2E)\cdot \overset{->}{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot \overset{->}{x_2} = \overset{->}{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Hauptvektor $\overset{->}{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ heranzuziehen.

IV. Mit $\overset{->}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich der die Funktionen y_1, y_2 enthaltende Lösungsvektor:

$$\overset{->}{y} = C_1\cdot e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\cdot e^{2x}\cdot\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}\right),$$

so dass die gesuchten <u>Funktionen</u>

$y_1 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} = (C_1+C_2x)e^{2x}$,

$y_2 = \frac{1}{5}C_2e^{2x}$

lauten.

V. Wir führen noch die <u>Probe</u> durch. Es ist zunächst:

$y_1 = (C_1+C_2x)e^{2x}$ => $y_1' = C_2e^{2x} + 2(C_1+C_2x)e^{2x} = (2C_1+C_2+2C_2x)e^{2x}$,

$y_2 = \frac{1}{5}C_2e^{2x}$ => $y_2' = \frac{2}{5}C_2e^{2x}$.

Damit gilt:

$2y_1 + 5y_2 = 2(C_1+C_2x)e^{2x} + 5(\frac{1}{5}C_2e^{2x}) = 2C_1e^{2x} + 2C_2xe^{2x} + C_2e^{2x} = (2C_1+C_2+2C_2x)e^{2x} = y_1'$,

$2y_2 = \frac{2}{5}C_2e^{2x} = y_2'$.