Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2. Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).

Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Die charakteristische Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

führt auf reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, λ_2 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 komplex, so sind sie konjugiert komplex mit $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Das Fundamentalsystem ist mit den Eigenvektoren $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix}$ im Komplexen $\{e^{(a+ib)z} \cdot \vec{z}_1,\ e^{(a-ib)z} \cdot \vec{z}_2\}$ und im Reellen $\{e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1),\ e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1)\}$ (Real- und Imaginärteil eines Elements des komplexen Fundamentalsystems). Die reellwertigen Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems lauten nun:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1) + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1) \text{ (falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex)}$$

mit reellen C_1, C_2.

II. Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$,

die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1\cdot(-4) = (2-\lambda)^2 + 4 = 0,$$

so dass

$(2-\lambda)^2 + 4 = 0$ | -4
$(2-\lambda)^2 = -4$ | √
$2-\lambda = \pm 2i$ | -2

$-\lambda = -2\pm2i$ | $\cdot(-1)$
$\lambda = 2\pm2i$
gilt und damit der Fall zweier konjugiert komplexer Lösungen $\lambda_{1,2} = 2\pm2i$ als Eigenwerte.

III. Zu den gefundenen Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 2\pm2i$ berechnen wir die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2+2i$: $A - (2+2i)E = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}$ => $(A-(2+2i)E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $x_1 = t$, $x_2 = 2it$

=> Eigenvektoren $\vec{x_1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahlig-komplexer Eigenvektor $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 2-2i$: $A - (2-2i)E = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}$ => $(A-(2-2i)E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ => $x_1 = t$, $x_2 = -2it$

=> Eigenvektoren $\vec{x_1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahlig-komplexer Eigenvektor $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

IV. Das komplexe Fundamentalsystem besteht aus den Komponenten $\{e^{(2+2i)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, $e^{(2-2i)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}\}$. Das zweite Element des Fundamentalsystems muss wegen der konjugiert-komplexen Beziehung zwischen den Elementen nicht weiter betrachtet werden. Mit Hilfe der Eulerschen Formel wird aus dem ersten Element:

$$e^{(2+2i)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = e^{2x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2x) + i\sin(2x) \\ 2i\cos(2x) - 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich der die reellen Funktionen y_1, y_2 enthaltende Lösungsvektor:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{2x} \cdot \mathrm{Re}\begin{pmatrix} \cos(2x) + i\sin(2x) \\ 2i\cos(2x) - 2\sin(2x) \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \cos(2x) + i\sin(2x) \\ 2i\cos(2x) - 2\sin(2x) \end{pmatrix} =$$

$$C_1 \cdot e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix},$$

so dass die gesuchten Funktionen
$y_1 = C_1e^{2x}\cos(2x) + C_2e^{2x}\sin(2x) = (C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{2x}$,
$y_2 = -2C_1e^{2x}\sin(2x) + 2C_2e^{2x}\cos(2x) = 2(-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))e^{2x}$
lauten.

V. Wir führen noch die Probe durch. Es ist zunächst:
$y_1 = (C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{2x}$ => $y_1' = 2(-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x)+C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{2x} = 2((C_1+C_2)\cos(2x)+(C_2-C_1)\sin(2x))e^{2x}$,
$y_2 = 2(-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))e^{2x}$ => $y_2' = 4(-C_1\cos(2x)-C_2\sin(2x)-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))e^{2x} = 4((C_2-C_1)\cos(2x)-(C_1+C_2)\sin(2x))e^{2x}$
Damit gilt:
$2y_1 + y_2 = 2(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{2x} + 2(-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))e^{2x} = 2((C_1+C_2)\cos(2x)+(C_2-C_1)\sin(2x))e^{2x} = y_1'$,
$-4y_1 + 2y_2 = -4(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))e^{2x} + 4(-C_1\sin(2x)+C_2\cos(2x))e^{2x} = 4((C_2-C_1)\cos(2x)-(C_1+C_2)\sin(2x))e^{2x} = y_2'$.