Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \qquad (*) \\ y_3' &= y_2 \end{aligned}$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2, y_3. Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2, y_3 des Differenzialgleichungssystems (*).

Lösung: I. Allgemein gilt: Ein <u>lineares homogenes Differenzialgleichungssystem</u> 1. Ordnung mit drei Funktionen y_1, y_2, y_3 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \;, \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{aligned}$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$.

Die charakteristische Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = 0$$

führt auf reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, λ_2, λ_3 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Nachfolgend gibt es einen reellen und zwei komplexe Eigenwerte, die zueinander konjugiert sind. Es gilt also: reeller Eigenwert λ_1, komplexe Eigenwerte $\lambda_{2,3} = a \pm ib$. Zum reellen Eigenwert λ_1 gehört der Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems: $(A-\lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}$, zu den komplexen Eigenwerten $\lambda_{2,3}$ gehören die (komplexen) Eigenvektoren $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{pmatrix}$, $\vec{z}_3 = \begin{pmatrix} z_{31} \\ z_{32} \\ z_{33} \end{pmatrix}$. Alle drei Eigenvektoren sind Grundlage des komplexen Fundamentalsystems $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1,\ e^{(a+ib)z} \cdot \vec{z}_2,\ e^{(a-ib)z} \cdot \vec{z}_3\}$, wobei das eine komplexe Element konjugiert zum anderen ist. Das reelle Fundamentalsystem ergibt sich, wenn von einem komplexen Element der Real- und Imaginärteil gebildet wird, also: $\{e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{x}_1,\ e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_2),\ e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_2)\}$; dies geschieht auch unter Verwendung der Eulerschen Gleichung: $e^{(a+ib)z} = e^{a}(\cos(bz)+i\sin(bz))$. Die reellwertigen Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems lauten nun:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z_2}) + C_3 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z_2})$$

(falls λ_1 reell. $\lambda_{2,3}$ = a±ib konjugiert komplex)

mit reellen C_1, C_2, C_3.

II. Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante der Matrix als:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)+0+(-1)\cdot(-1)\cdot 1-0-0-3\cdot(-1)\cdot(-\lambda) = \lambda(2-\lambda)(1+\lambda)-3\lambda+1 =$$

$$\lambda(2+2\lambda-\lambda-\lambda^2)-3\lambda+1 = \lambda(-\lambda^2+\lambda+2)-3\lambda+1 = -\lambda^3+\lambda^2+2\lambda-3\lambda+1 =$$

$$-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 = 0$$

mit λ_1=1 als Lösung und Polynomdivision:

$(-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1):(\lambda-1) = -\lambda^2-1$
$\underline{-(-\lambda^3+\lambda^2)}$
$\quad 0-\lambda+1$
$\quad \underline{-(-\lambda+1)}$
$\qquad 0$

sowie:

$-\lambda^2-1 = 0 \qquad | +\lambda^2$
$-1 = \lambda^2 \qquad | \sqrt{}$
$\lambda_{2,3} = \pm i$.

Wir haben damit als <u>Eigenwerte</u> die reelle Zahl λ_1=1 und die (konjugiert) komplexen Zahlen $\lambda_{2,3} = \pm i$.

III. Zu den gefundenen Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ berechnen wir die <u>Eigenvektoren</u>:

<u>$\lambda_1 = 1$</u>: A + E = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ => $(A+E)\cdot\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\vec{x_1} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 1x_{11} + 3x_{12} - 1x_{13} = 0$
$- 1x_{11} - 2x_{12} = 0$
$+ 1x_{12} - 1x_{13} = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	R.S.
1	3	-1	0
-1	-2	0	0
0	1	-1	0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 1*(*1*) /

1	3	-1	0
0	1	-1	0
0	1	-1	0

2. Schritt: 1*(3) - 1*(2) /

1	3	-1	|	0
0	1	-1	|	0
0	0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ 1x_{11} + 3x_{12} - 1x_{13} &= 0 \\ +\ 1x_{12} - 1x_{13} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x_{13} = t
x_{12} = 1t
x_{11} = -2t

=> Eigenvektoren $\overset{->}{x_1} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell => ganzzahliger Eigenvektor $\overset{->}{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = i$: A – iE = $\begin{pmatrix} 2-i & 3 & -1 \\ -1 & -1-i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$ => $(A-iE)\cdot \overset{->}{z_2} = \begin{pmatrix} 2-i & 3 & -1 \\ -1 & -1-i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \overset{->}{z_2} = \overset{->}{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +\ (2-i)z_{21} + 3z_{22} - 1z_{23} &= 0 \\ -\ 1z_{21} - (1+i)z_{22} &= 0 \\ +\ 1z_{22} - Iz_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

z_{21}	z_{22}	z_{23}	|	R.S.
2-i	3	-1	|	0
-1	-1-i	0	|	0
0	1	-i	|	0

1. Schritt: (2-i)*(2) + 1*(1) /

(2-i)	3	-1	|	0
0	-i	-1	|	0
0	1	-i	|	0

2. Schritt: i*(3) + 1*(2) /

1	3	-1	|	0
0	-i	-1	|	0
0	0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ (2-i)z_{21} + 3z_{22} - 1z_{23} &= 0 \\ -\ iz_{22} - 1z_{23} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

z_{23} = t
z_{22} = it
z_{21} = (1-i)t

u.a. auf Grund von:

z_{23} = t => $-iz_{22}$ – t = 0 => $-iz_{22}$ = t => z_{22} = t/(-i) = it/($-i^2$) = it/1 = it
z_{23} = t, z_{22} = it => (2-i)z_{21} + 3it – t = 0 => (2-i)z_{21} = t-3it = (1-3i)t => z_{21} = (1-3i)t/(2-i) = (1-3i)(2+i)t/(2-i)/(2+i) = (2+i-6i-3i^2)t/(2^2-i^2) = (2-5i+3)t/(4+1) = (5-5i)t/5 = (1-i)t.

=> Eigenvektoren $\overset{->}{z_2} = t\begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, t komplex => ganzzahliger Eigenvektor $\overset{->}{z_2} = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -i$: Auf die Berechnungen zu diesem Eigenwert kann laut I. verzichtet werden.

IV. Das komplexe Fundamentalsystem lautet dann: $\{e^x\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\ e^{ix}\begin{pmatrix}1-i\\i\\1\end{pmatrix},\ e^{-ix}\begin{pmatrix}1+i\\-i\\1\end{pmatrix}\}$. Die Umwandlung in ein reelles Fundamentalsystem erfolgt über die Eulersche Gleichung:

$$e^{ix}\begin{pmatrix}1-i\\i\\1\end{pmatrix}=(\cos x+i\sin x)\begin{pmatrix}1-i\\i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-i)(\cos x+i\sin x)\\i(\cos x+i\sin x)\\\cos x+i\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x+\sin x+i(\sin x-\cos x)\\-\sin x+i\cos x\\\cos x+i\sin x\end{pmatrix}$$

und die Bildung von Real- und Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\cos x+\sin x+i(\sin x-\cos x)\\-\sin x+i\cos x\\\cos x+i\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}\cos x+\sin x+i(\sin x-\cos x)\\-\sin x+i\cos x\\\cos x+i\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x-\cos x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}.$$

Das reelle Fundamentalsystem lautet damit: $\{\begin{pmatrix}-2e^x\\e^x\\e^x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin x-\cos x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}\}$.

V. Mit $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ ergibt sich der die Funktionen y_1, y_2, y_3 enthaltende Lösungsvektor:

$$\vec{y}=C_1\cdot\begin{pmatrix}-2e^x\\e^x\\e^x\end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix}\sin x-\cos x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix},$$

so dass die gesuchten Funktionen

$y_1 = -2C_1e^x + C_2(\cos(x)+\sin(x))+C_3(\sin(x)-\cos(x)) = -2C_1e^x + (C_2-C_3)\cos(x) + (C_2+C_3)\sin(x)$,
$y_2 = C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x)$
$y_3 = C_1e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x)$

lauten.

VI. Wir führen noch die Probe durch. Es ist zunächst:

$y_1 = -2C_1e^x + (C_2-C_3)\cos(x) + (C_2+C_3)\sin(x) \Rightarrow y_1' = -2C_1e^x + (C_3-C_2)\sin(x) + (C_2+C_3)\cos(x)$,
$y_2 = C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x) \Rightarrow y_2' = C_1e^x - C_2\cos(x) - C_3\sin(x)$,
$y_3 = C_1e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x) \Rightarrow y_3' = C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x)$.

Damit gilt:

$2y_1 + 3y_2 - y_3 =$
$2(-2C_1e^x + (C_2-C_3)\cos(x) + (C_2+C_3)\sin(x)) + 3(C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x))$
$- (C_1e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x)) =$
$(-4C_1+3\, C_1-C_1)\, e^x + (2(C_2-C_3)+3C_3-C_2)\cos(x) + (2(C_2+C_3)-3C_2-C_3)\sin(x) =$
$-2C_1e^x + (C_2+C_3)\cos(x) + (C_3-C_2)\sin(x) = y_1'$,
$-y_1 - y_2 = -(-2C_1e^x + (C_2-C_3)\cos(x) + (C_2+C_3)\sin(x)) - (C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x))$
$(2C_1-C_1)e^x + ((C_3-C_2)-C_3)\cos(x) + (-(C_2+C_3)+C_2)\sin(x) = C_1e^x - C_2\cos(x) - C_3\sin(x) = y_2'$,
$y_2 = C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x) = y_3'$.