Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2. Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).

Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned},$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Die charakteristische Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

führt auf reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, λ_2 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 komplex, so sind sie konjugiert komplex mit $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Das Fundamentalsystem ist mit den Eigenvektoren $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix}$ im Komplexen $\{e^{(a+ib)z} \cdot \vec{z}_1,\ e^{(a-ib)z} \cdot \vec{z}_2\}$ und im Reellen $\{e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1),\ e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1)\}$ (Real- und Imaginärteil eines Elements des komplexen Fundamentalsystems). Die reellwertigen Lösungen des linearen homogenen Differenzialgleichungssystems lauten nun:

$$\vec{y} = C_1 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Re}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1) + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \mathrm{Im}(e^{ibx} \cdot \vec{z}_1) \quad \text{(falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex)}$$

mit reellen C_1, C_2.

II. Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 5 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) - 5 \cdot (-2) = -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 10 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

so dass

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ (abc-Formel: a = 1, b = -4, c = 5)

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

gilt und damit der Fall zweier konjugiert komplexer Lösungen $\lambda_{1,2} = 2\pm i$ als Eigenwerte.

III. Zu den gefundenen Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 2\pm i$ berechnen wir die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2+i$: A – (2+i)E = $\begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix}$ => $(A-(2+i)E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

$x_1 = -(1,5+0,5i)t$, $x_2 = t$ => Eigenvektoren $\vec{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$, t reell =>

ganzzahlig-komplexer Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \end{pmatrix}$ (t=-2)

$\lambda_1 = 2-i$: A – (2-i)E = $\begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix}$ => $(A-(2-i)E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

$x_1 = (-1,5+0,5i)t$, $x_2 = t$ => Eigenvektoren $\vec{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$, t reell =>

ganzzahlig-komplexer Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \end{pmatrix}$ (t=-2).

IV. Das komplexe Fundamentalsystem besteht aus den zueinander konjugiert-komplexen Komponenten $\{e^{(2+i)x}\cdot\begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \end{pmatrix},\ e^{(2-i)x}\cdot\begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \end{pmatrix}\}$. Das zweite Element des Fundamentalsystems muss wegen der konjugiert-komplexen Beziehung zwischen den Elementen nicht weiter betrachtet werden. Mit Hilfe der Eulerschen Formel wird aus dem ersten Element:

$$e^{(2+i)x}\cdot\begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \end{pmatrix} = e^{2x}(\cos x + i\sin x)\cdot\begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \end{pmatrix} = e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} (3+i)\cos x + (3+i)i\sin x \\ -2\cos x - 2i\sin x \end{pmatrix} =$$

$$e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} 3\cos x - \sin x + i(\cos x + 3\sin x) \\ -2\cos x - 2i\sin x \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich der die reellen Funktionen y_1, y_2 enthaltende Lösungsvektor:

$$\vec{y} = C_1\cdot e^{2x}\cdot \mathrm{Re}\begin{pmatrix} 3\cos x - \sin x + i(\cos x + 3\sin x) \\ -2\cos x - 2i\sin x \end{pmatrix} + C_2\cdot e^{2x}\cdot \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 3\cos x - \sin x + i(\cos x + 3\sin x) \\ -2\cos x - 2i\sin x \end{pmatrix} =$$

$$C_1\cdot e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} 3\cos x - \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix} + C_2\cdot e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} \cos x + 3\sin x \\ -2\sin x \end{pmatrix}.$$

so dass die gesuchten Funktionen

$y_1 = 3C_1e^{2x}\cos(x) - C_1e^{2x}\sin(x) + C_2e^{2x}\cos(x) + 3C_2e^{2x}\sin(x) = ((3C_1+C_2)\cos(x)+(3C_2-C_1)\sin(x))e^{2x}$,
$y_2 = -2C_1e^{2x}\cos(x) - 2C_2e^{2x}\sin(x) = -2(C_1\cos(x)+C_2\sin(x))e^{2x}$

lauten.