

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y^2 - 4x^2 y' = 0, \quad y(1) = -\frac{4}{3}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung $y(a) = b$, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion $y(x)$ ergibt.

II. Aus $y^2 - 4x^2 y' = 0$ folgt zunächst:

$$y^2 - 4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Addition ergibt:

$$y^2 = 4x^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

Division mit dy (Trennung der Variablen) ergibt:

$$\frac{y^2}{dy} = \frac{4x^2}{dx}.$$

Wir bilden den jeweiligen Kehrwert:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{4x^2}.$$

Integration führt auf:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{4x^2} + C,$$

d.h.:

$$\int y^{-2} dy = \frac{1}{4} \int x^{-2} dx + C$$

und mithin:

$$-y^{-1} = -\frac{1}{4} x^{-1} + C,$$

woraus sich nach Multiplikation mit -1 ergibt:

$$y^{-1} = \frac{1}{4}x^{-1} - C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4x} - C.$$

Kehrwertbildung führt auf die Umformungen:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{4x} - C} = \frac{1}{\frac{1}{4x} - \frac{4Cx}{4x}} = \frac{1}{\frac{1-4Cx}{4x}} = \frac{4x}{1-4Cx}.$$

Wir betrachten noch die Anfangsbedingung $y(1) = -\frac{4}{3}$. Die Bestimmung von C erfolgt gemäß:

$$y(1) = \frac{4 \cdot 1}{1-4C \cdot 1} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{1-4C} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1-4C}{4} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1-4C = -3 \Leftrightarrow -4C = -4 \Leftrightarrow C = 1.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet wegen $C = 1$ also:

$$y = \frac{4x}{1-4x}.$$