Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$(x^2+4x+5)y' = (x^2+x)y\,,\ \ y(-2)=e^{-2}\,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y)$$

ist bei <u>Trennung der Variablen</u> vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$$(x^2+4x+5)y' = (x^2+x)y \qquad \text{(Ersetzen: } y'=\frac{dy}{dx}\text{)}$$

$$(x^2+4x+5)\frac{dy}{dx} = (x^2+x)y \qquad |\ \cdot dx$$

$$(x^2+4x+5)dy = (x^2+x)ydx \qquad |\ :y$$

$$(x^2+4x+5)\frac{dy}{y} = (x^2+x)dx \qquad |\ :(x^2+4x+5)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2+x}{x^2+4x+5}dx \qquad \text{(Variablen getrennt, Integration)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2+x}{x^2+4x+5}dx \ \ (*)$$

Wir wenden uns nun dem unbestimmten Integral $\int \frac{x^2+x}{x^2+4x+5}dx$ einer gebrochen rationalen Funktion zu und haben zunächst mittels Polynomdivision die folgende Darstellung des Integranden:

$$\frac{x^2+x}{x^2+4x+5} = (x^2+x):(x^2+4x+5) = 1-\frac{3x+5}{x^2+4x+5}\,.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Grundintegrale $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx = \ln\left|x^2+bx+c\right|$, $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$:

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+4x+5}dx = \int\left(1-\frac{3x+5}{x^2+4x+5}\right)dx = \int 1dx - \int \frac{3x+5}{x^2+4x+5}dx =$$

$$\int 1dx - \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+5}dx = \int 1dx - \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx =$$

$$\int 1dx - \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx \underset{\left\{\begin{smallmatrix} z=x+2 \\ dz=dx \end{smallmatrix}\right\}}{=} \int 1dx - \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{1}{z^2+1}dz =$$

$$x - \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) + \arctan z \underset{\{x+2=z\}}{=} x - \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2).$$

Wir fahren mit der Gleichung (*) fort und integrieren:

$$\ln y = x - \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C_1 \qquad | \; e^{()}$$

$$y = e^{x - \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C_1} \qquad \text{(Potenzgesetze)}$$

$$y = e^x \cdot e^{-\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)} \cdot e^{\arctan(x+2)} \cdot e^{C_1} \qquad \text{(Logarithmengesetze, } C=e^{C_1}\text{)}$$

$$y = Ce^x(x^2+4x+5)^{-\frac{3}{2}}e^{\arctan(x+2)}$$

III. Die Bestimmung von C aus der <u>Anfangsbedingung</u> $y(-2)=e^{-2}$ erfolgt mit:

$$y(-2) = Ce^{-2}((-2)^2+4\cdot(-2)+5)^{-\frac{3}{2}}e^{\arctan(-2+2)} = e^{-2} \Leftrightarrow Ce^{-2}\cdot 1^{-\frac{3}{2}}\cdot e^0 = e^{-2} \Leftrightarrow C=1.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet:

$$y = e^x(x^2+4x+5)^{-\frac{3}{2}}e^{\arctan(x+2)}.$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1387