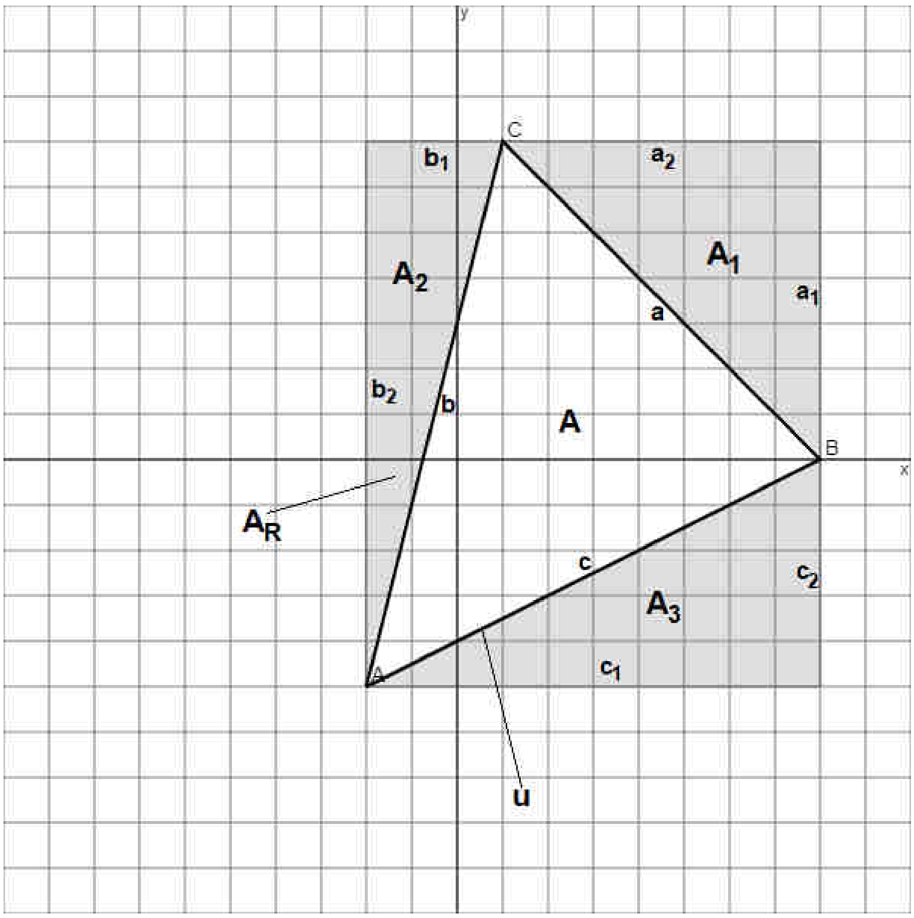
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Dreiecksberechnung

Aufgabe: Ein Dreieck ABC besitzt im x-y-Koordinatensystem die Ecken A(-6|-3), B(6|0,5), C(0|5). Berechne exakt Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. Ein Dreieck ABC in einem kartesischen x-y- Koordinatensystem ist durch seine Eckpunkte A, B, C festgelegt. Erweitert man das Dreieck durch rechtwinklige Dreiecke, so dass die hinzugekommenen rechtwinkligen Dreiecke die (nicht horizontal oder vertikal verlaufenden) Seiten des Dreiecks ABC als Hypotenusen haben, so entsteht ein Rechteck, das das Dreieck ABC als Fläche und die Ecken A, B, C auf seinen Seiten enthält.



Die Längen der horizontalen und vertikalen Strecken a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sind leicht zu ermitteln, für die Dreiecksseiten a, b, c gilt gemäß dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 \Rightarrow b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$
$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

und für den Dreiecksumfang:

$$u = a + b + c.$$

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC bestimmt sich aus dem Flächeninhalt des Rechtecks A_R über dessen Seitenlängen $c_1 = b_1+a_2$, $b_2 = a_1+c_2$ (oder ähnlich) und den Flächeninhalten der rechtwinkligen Dreiecke A_1, A_2, A_3 über die Katheten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 mit:

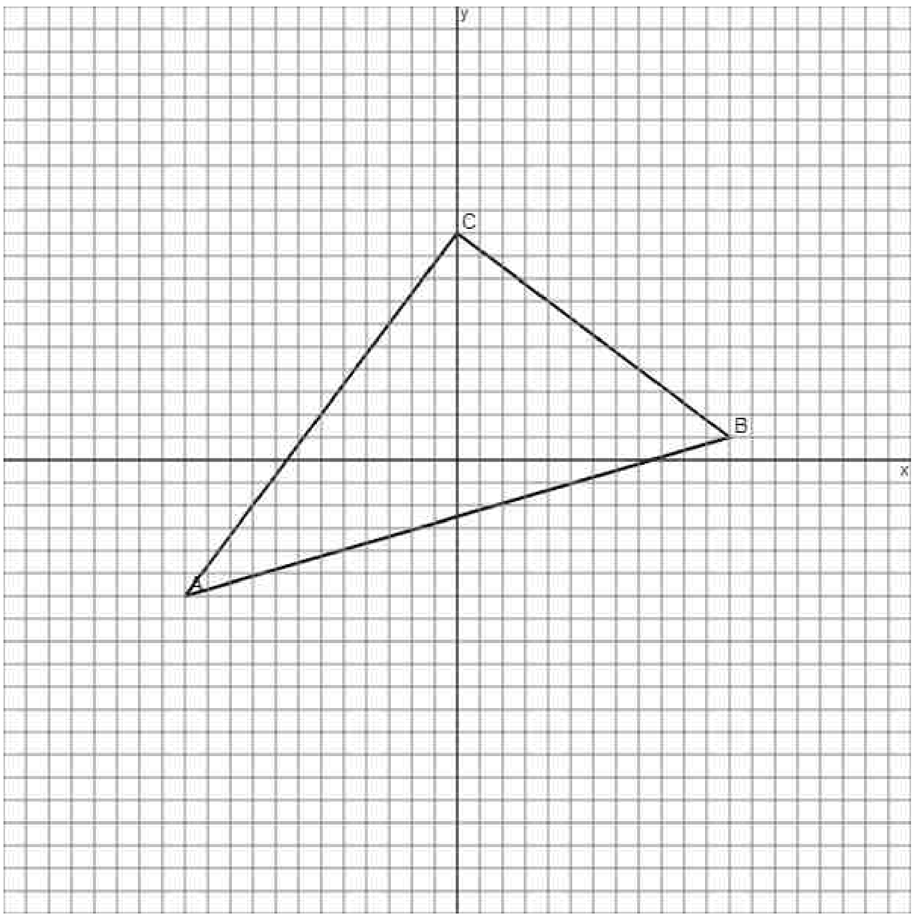
$$A_R = b_2c_1 \text{ (oder ähnlich)}$$
$$A_1 = \frac{1}{2}a_1a_2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}b_1b_2$$
$$A_3 = \frac{1}{2}c_1c_2$$

als:

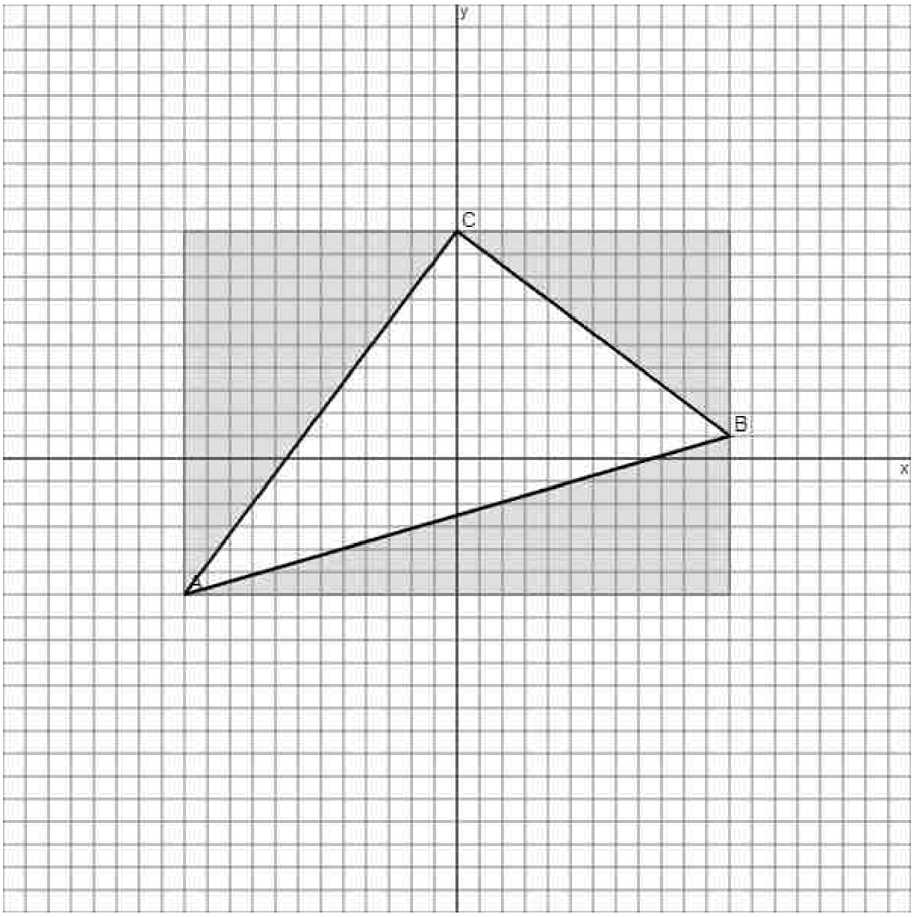
$$A = A_R - A_1 - A_2 - A_3.$$

Im Übrigen gilt: Sind die Koordinaten der Ecken A, B, C rational, so ist auch für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC rational.

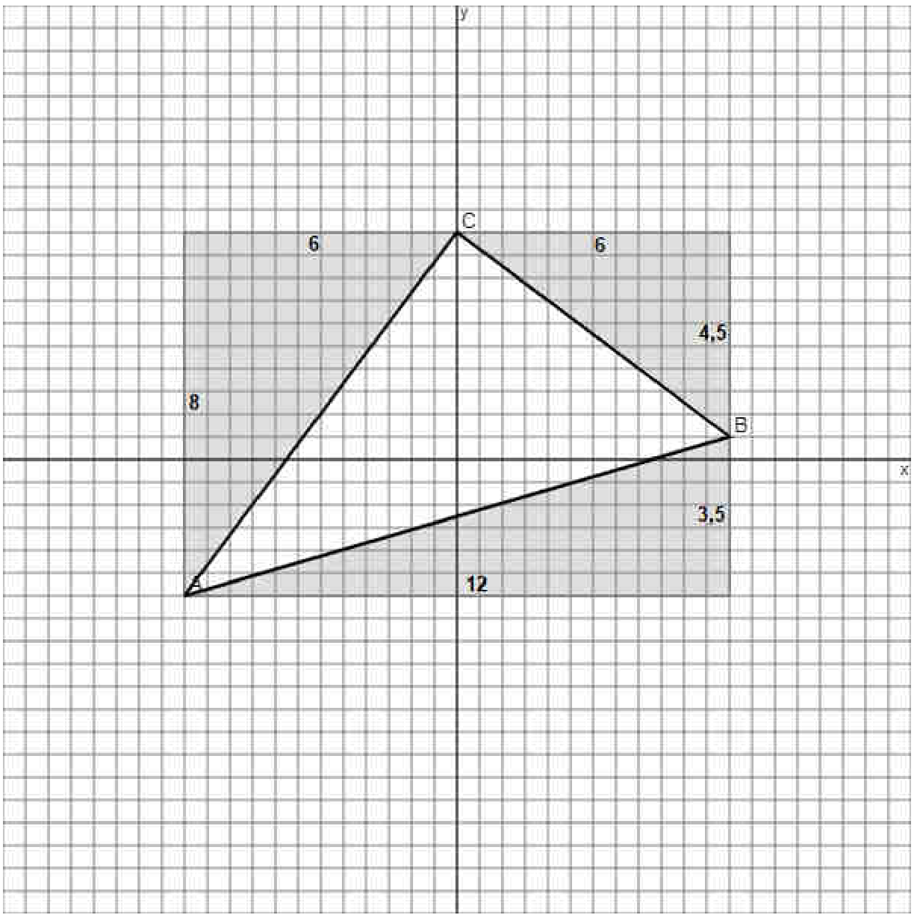
II. Wir zeichnen das Dreieck ABC auf Grund der Ecken A(-6|-3), B(6|0,5), C(0|5) in das x-y-Koordinatensystem ein und erhalten:



Wir ergänzen das Dreieck ABC über drei rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten horizontal und vertikal die Ecken A, B, C verbinden, zu einem Rechteck:



Die Katheten der drei rechtwinkligen Dreiecke haben die Längen:



III. Dann gilt für die Dreiecksseiten nach dem Satz des Pythagoras:

$a^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 56{,}25 \Rightarrow a = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ LE

$b^2 = 6 \quad + 8^2 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{100} = 10$ LE

$c^2 = 12^2 + 3{,}5^2 = 156{,}25 \Rightarrow c = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5$ LE,

so dass sich als <u>Umfang</u> u des Dreiecks ABC ergibt:

u = a + b + c = 7,5 + 10 + 12,5 = 30 LE.

IV. Wir berechnen die Flächeninhalte von Rechteck und rechtwinkligen Dreiecken:

$A_R = 12 \cdot 8 = 96$ FE

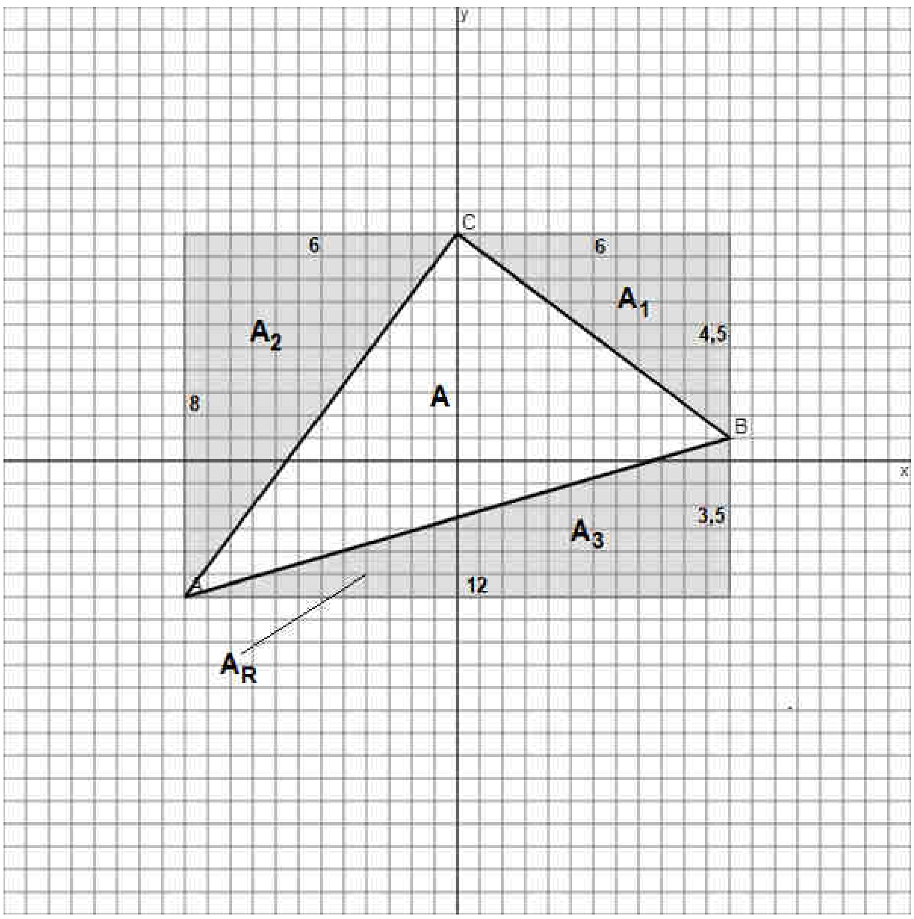
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot 6 = 13{,}5$ FE

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ FE

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3{,}5 = 21$ FE,

und damit den <u>Flächeninhalt</u> A des Dreiecks ABC als:

$A = A_R - A_1 - A_2 - A_3 = 96 - 13{,}5 - 24 - 21 = 37{,}5$ FE.



(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 02.2022 / Aufgabe 1586