

Mathematikaufgaben

> Geometrie

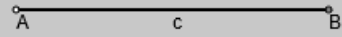
> Dreieckskonstruktion und -berechnung

Aufgabe: Ein Dreieck ABC besitzt die Seitenlänge $c = 8$ [LE] sowie die Winkel $\alpha = 35^\circ$ und $\beta = 82^\circ$ (LE = Längeneinheiten).

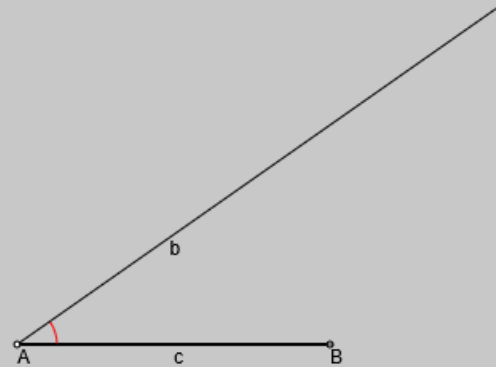
- a) Konstruiere aus den vorgegebenen Eigenschaften das Dreieck ABC.
- b) Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck ABC.

Lösung: a) Die geometrische Dreieckskonstruktion erfolgt nach dem Kongruenzsatz WSW mit der Seite c als Strecke zwischen den Ecken A und B und den Winkeln α und β bei A und B. Damit gilt:

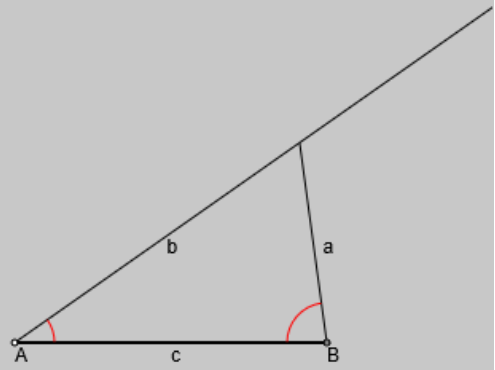
Schritt 1: Zeichne die Dreiecksseite $c = 8$ [LE] zwischen den Ecken A und B des Dreiecks.



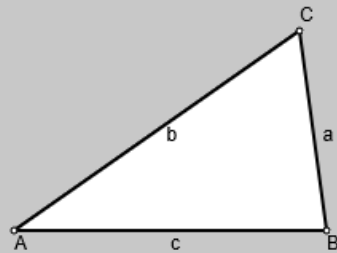
Schritt 2: Trage an der Ecke A den Winkel $\alpha = 35^\circ$ ab. (Auf dem Schenkel des Winkels α liegt die Seite b des Dreiecks.)



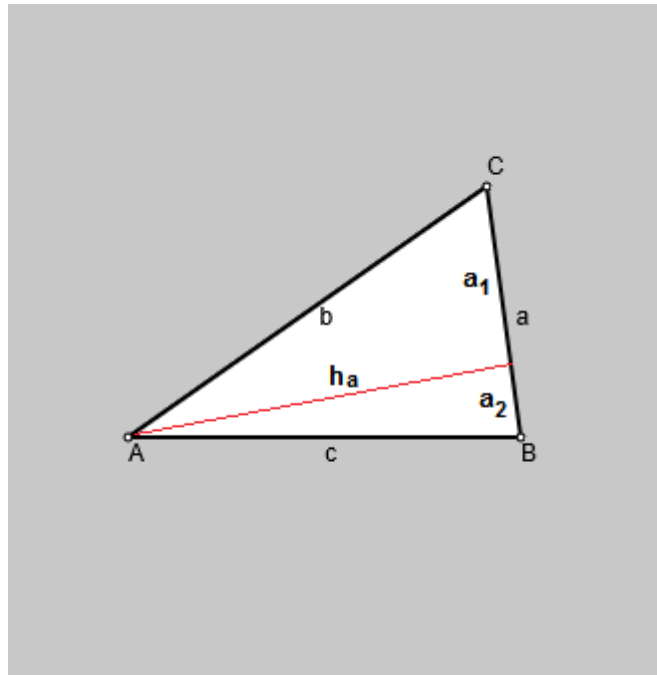
Schritt 3: Trage an der Ecke B den Winkel $\beta = 82^\circ$ ab. (Auf dem Schenkel des Winkels β liegt die Seite a des Dreiecks.)



Schritt 4: Der Schnittpunkt der Schenkel der Winkel α und β ist die Ecke C des Dreiecks.



b) I. Es handelt sich um ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 82^\circ$ und $\gamma = 180^\circ - 35^\circ - 82^\circ = 63^\circ$. Zur Berechnung der noch fehlenden Seiten a und b teilen wir das Dreieck ABC entlang der Höhe h_a (zur Dreiecksseite a) in zwei rechtwinklige Dreiecke (unteres, oberes rechtwinkliges Dreieck) auf:



II. Im unteren rechtwinkligen Dreieck ist die Seite $c = 8$ [LE] und der Winkel $\beta = 82^\circ$ vorhanden, so dass sich etwa die Höhe h_a über den Sinus (als Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse) berechnen lässt:

$$\sin \beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow \sin 82^\circ = \frac{h_a}{8} \Rightarrow 8 \cdot \sin 82^\circ = h_a \Rightarrow h_a = 7,92 \text{ [LE]}.$$

Mit dem Satz des Pythagoras berechnen wir die dritte Seite a_2 als Kathete im unteren rechtwinkligen Dreieck und erhalten:

$$a_2^2 = c^2 - h_a^2 \Rightarrow a_2^2 = 8^2 - 7,92^2 = 1,27 \Rightarrow a_2 = 1,13 \text{ [LE]}.$$

Damit sind alle Seiten im unteren rechtwinkligen Dreieck bestimmt.

III. Wir wenden uns dem oberen rechtwinkligen Dreieck zu und bestimmen mit Hilfe der Höhe h_a und dem Winkel γ zuerst die Seite a_1 , indem wir den Tangens (als Gegenkathete geteilt durch Ankathete) benutzen:

$$\tan \gamma = \frac{h_a}{a_1} \Rightarrow \tan 63^\circ = \frac{7,92}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{7,92}{\tan 63^\circ} \Rightarrow a_1 = 4,04 \text{ [LE]}.$$

Die Seite a des Dreiecks ABC ist dann bestimmt, wenn wir a_1 und a_2 zusammenzählen; also:

$$a = a_1 + a_2 = 4,04 + 1,13 = 5,17 \text{ [LE]}.$$

Die Seite b des Dreiecks ABC erhalten wir durch Anwenden des Satzes des Pythagoras im oberen rechtwinkligen Dreieck; die Seite b ist hier die Hypotenuse, die Seiten a_1 und h_a sind die Katheten:

$$b^2 = a_1^2 + h_a^2 \Rightarrow b^2 = 4,04^2 + 7,92^2 = 79,05 \Rightarrow b = 8,89 \text{ [LE]}.$$

Damit sind alle Seiten und alle Winkel des beliebigen Dreiecks ABC bestimmt.

IV. Beachte noch, dass bzgl. Sinus, Kosinus und Tangens für das Errechnen einer unbekannteten Seitenlänge x folgende Regeln gelten:

$$\sin \varphi = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cos \varphi, \quad \tan \varphi = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \tan \varphi$$

(Multiplikation mit dem Nenner des Bruchs, wenn die Unbekannte im Zähler steht)

$$\sin \varphi = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{\sin \varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \frac{b}{\tan \varphi}$$

(Vertauschen der Unbekannten mit dem Sinus, Kosinus oder Tangens, wenn die Unbekannte im Nenner des Bruchs steht).

Für den Satz des Pythagoras in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gelten schließlich die Umformungen:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} .$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 302