Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Was lässt sich über die Lage der Ebenen E und F zueinander aussagen? Es gilt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 24.$$

Berechne gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden oder den Abstand der Ebenen.

Lösung: I. Zur Bestimmung der <u>Schnittmenge</u> zwischen den Ebenen E und F (die Ebenen schneiden sich nicht; es gibt eine Schnittgerade; die Ebenen sind identisch) zerlegen wir die in Parameterform gegebene Ebene E in ihre Komponenten, also:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ -> } x_1 = 2-r+3s,\ x_2 = 4+2r-s,\ x_3 = -3+2r+4s.$$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in die Koordinatenform der Ebene F ergibt:

F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 24$ => $2(2-r+3s)+2(4+2r-s)-(-3+2r+4s) = 24$ => $4-2r+6s+8+4r-2s+3-2r-4s = 24$ => $15 = 24$.

Wir erhalten einen Widerspruch und folgern, dass die zwei Ebenen sich nicht schneiden, mithin parallel sein müssen.

II. Im Fall der Parallelität der Ebenen E und F ist deren Abstand zueinander zu berechnen. Dies geschieht unter Aufstellen der <u>Koordinatenform</u> der Ebene E, wobei wir wegen der Parallelität den Normalenvektor der Ebene F als Normalenvektor der Ebene E benutzen können. Unter Hinzunahme des Stützvektors der Ebene E erhalten wir die (modifizierte) Normalenform der Ebene E:

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

so dass nach Auflösen der Skalarprodukte:

E: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4+8+3 = 15$,

also:

E: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 15$

gilt.

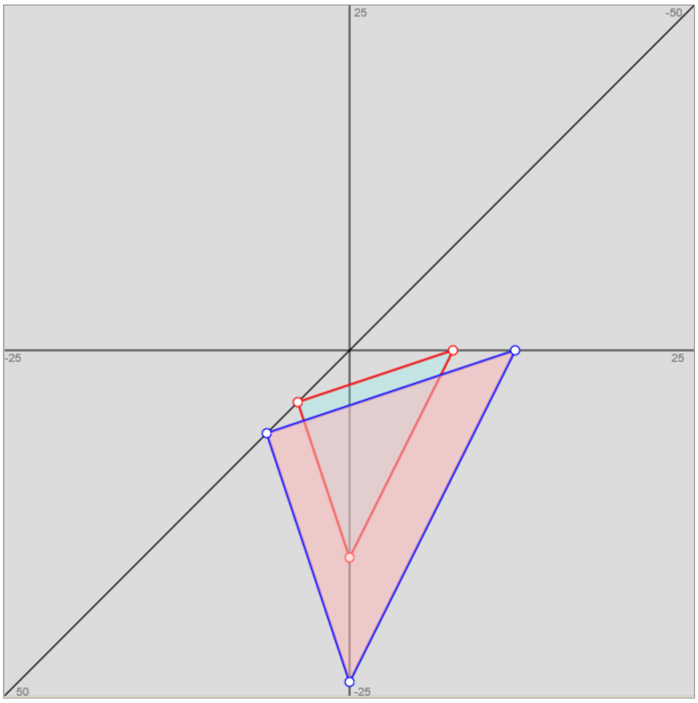
III. Der <u>Abstand</u> zwischen den Ebenen E und F errechnet sich auf Grund desselben Normalenvektors leicht mit der (modifizierten) Hesseschen Normalenform:

$$d(E,F) = \frac{|d_F - d_E|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{(mit: E: } ax_1+bx_2+cx_3 = d_E\text{, F: } ax_1+bx_2+cx_3 = d_F\text{)}$$

als:

$$d(E,F) = \frac{|24-15|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ LE.}$$

IV. Grafisch ergibt sich:



(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 490