Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Berechne eine Parametergleichung der Schnittgeraden g der zwei Ebenen E und F. Für die Ebenen gilt:

$$E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6,\ F: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.$$

Zeichne die Ebenen E und F zusammen mit der Schnittgeraden g in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

Lösung: I. Zur Ermittlung der Schnittgeraden ist ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus den Koordinatengleichungen der zwei Ebenen, zu lösen. Es gilt:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 4x_1\ +\ 2x_2\ +\ 1x_3\ =\ 6$

$+\ 1x_1\ +\ 2x_2\ +\ 3x_3\ =\ 6$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	|	*R.S.*
4	2	1	|	6
1	2	3	|	6

1. Schritt: 4*(*2*) - 1*(*1*) /

4	2	1	|	6
0	6	11	|	18

Ergänzen einer Zeile (3) (0 = 0):

4	2	1	|	6
0	6	11	|	18
0	0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ 4x_1\ +\ 2x_2\ +\ 1x_3 &= 6 \\ +\ 6x_2\ +\ 11x_3 &= 18 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_2 = 3 - 1.8333t = 3 – 11t/6$
$x_1 = 0 + 0.6667t = 2t/3$

Das lineare Gleichungssystem besitzt also die Lösung: $x_1 = 2t/3$, $x_2 = 3–11t/6$, $x_3 = t$ für beliebiges reelles t.

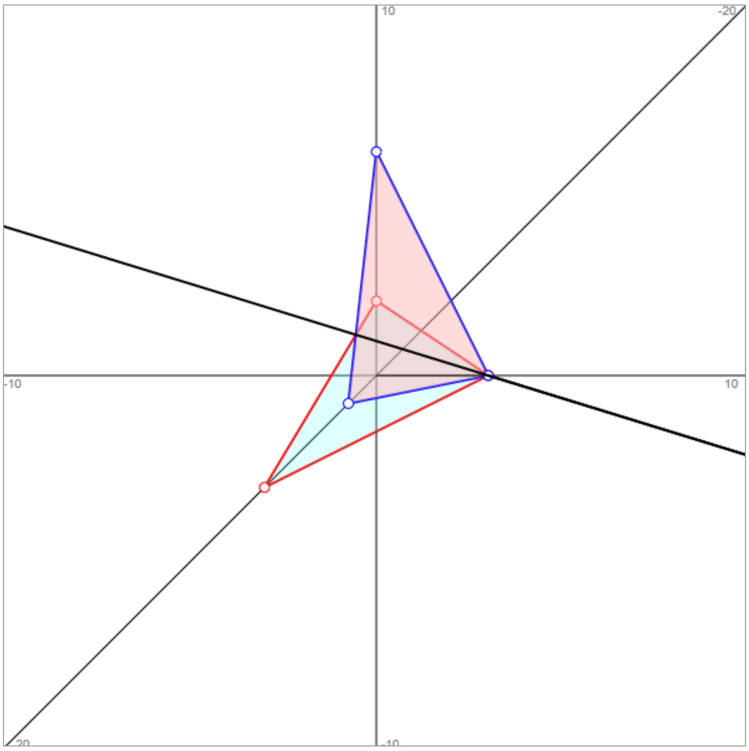
II. Wir erhalten die Gleichung der Schnittgeraden g mit reellem Parameter t wie folgt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ 3-\frac{11}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{11}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III. Grafisch erkennen wir, dass die Schnittgerade g durch den gemeinsamen Spurpunkt $S_2(0|3|0)$ der Ebenen E und F verläuft. Zum Einzeichnen der Ebenen E und F bestimmen wir als jeweilige Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Achsen des kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems):

Ebene E: $S_1(6:1|0|0) = (6|0|0)$, $S_2(0|6:2|0) = (0|3|0)$, $S_3(0|0|6:3) = (0|0|2)$
Ebene F: $S_1(6:4|0|0) = (1,5|0|0)$, $S_2(0|6:2|0) = (0|3|0)$, $S_3(0|0|6:1) = (0|0|1)$.

Die Spurpunkte der jeweiligen Ebenen werden durch die Spurgeraden miteinander verbunden, so dass durch das entstehende Dreieck der Eindruck einer Ebene ensteht. Zum Einzeichnen der Schnittgeraden g beachten wir, dass – wie gesagt – die Schnittgerade durch den Spurpunkt $S_2(0|3|0)$ verläuft und weiter durch den Schnittpunkt der zwei Spurgeraden der Ebenen E und F, die auf der x_1-x_3-Grundebene des Koordinatensystems liegen und jeweils die Spurpunkte $S_1(6|0|0)$ und $S_3(0|0|2)$ der Ebene E und $S_1(1,5|0|0)$ und $S_3(0|0|6)$ der Ebene F miteinander verbinden. Durch Spur- und Schnittpunkt verläuft die einzuzeichnende Gerade g. Wir erhalten insgesamt:



www.michael-buhlmann.de / 06.2019 / Aufgabe 873