Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte A(2|4|1), B(0|2|-1), C(4|-2|1) und D(4|-6|0). Stelle fest, ob alle vier Punkte auf einer Ebene liegen.

Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Drei Punkte, z.B. A, B und C, bestimmen eine Ebene E, die sich in Parameterform darstellen lässt als:

$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC} \text{ (PF)},$$

in Koordinatenform als:

$$E:\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ bzw. } E:\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1 \text{ (KF)}.$$

Die Koordinatenform ist dabei die günstigere, da das Einsetzen des vierten Punktes, z.B. D, in die Koordinatengleichung sofort zu einer wahren ($D \varepsilon E$) oder falschen mathematischen Aussage ($D \notin E$) führt (Punktprobe). Die Koordinatenform ergibt sich aus der Parameterform der Ebene durch Ermittlung des Normalenvektors als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und anschließender Skalarmultiplikation von Normalenvektor mit Vektor $\vec{x}$ bzw. Ortsvektor $\vec{a}$. Die Koordinatenform E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ (*) ergibt sich schneller durch Einsetzen der x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten der drei Punkte in Gleichung (*) und Lösung des linearen Gleichungssystems etwa mit dem Gauß-Algorithmus.

II. Wir bestimmen aus den Punkten A(2|4|1), B(0|2|-1), C(4|-2|1) die Ebenengleichung in Koordinatenform vermöge des Ansatzes:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ (*),

setzen die drei Punkte in (*) ein und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrrrr} +2a & + & 4b & + & 1c & = & 1 \\ & + & 2b & - & 1c & = & 1 \\ +4a & - & 2b & + & 1c & = & 1 \end{array}$$

Wir rechnen das so entstandene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Algorithmus aus:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrr} +2a & + & 4b & + & 1c & = & 1 \\ & + & 2b & - & 1c & = & 1 \\ +4a & - & 2b & + & 1c & = & 1 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 1*(*3*) - 2*(*1*)

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -1 & -1 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) + 5*(*2*)

2	4	1	|	1
0	2	-1	|	1
0	0	-6	|	4

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & 2a & + & 4b & + & 1c & = 1 \\ & & + & 2b & - & 1c & = 1 \\ & & & & - & 6c & = 4 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -2/3$
$b = 1/6$
$a = 1/2$

Die Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C lautet damit:

E: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 1$ (**).

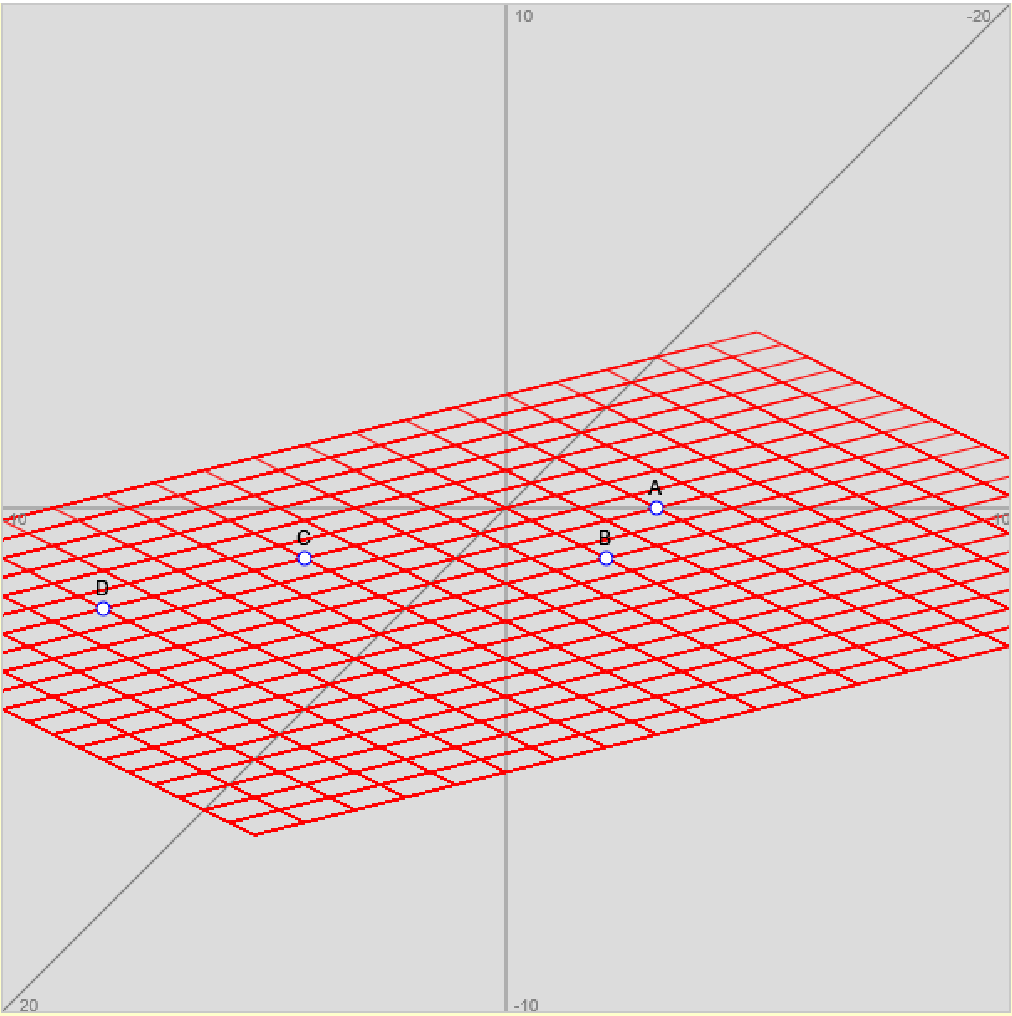
Multiplikation der Gleichung (**) mit dem Hauptnenner (hier: 6) ergibt:

E: $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6$ (***).

Punktprobe mit dem Punkt D(4|-6|0), d.h. Einsetzen der Koordinaten von D in (***) führt schließlich auf:

$3 \cdot 4 + (-6) - 4 \cdot 0 = 12 - 6 - 0 = 6$,

d.h.: DεE. Alle vier Punkte A, B, C und D liegen damit auf einer Ebene (E: $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6$).



www.michael-buhlmann.de / 01.2016 / Aufgabe 186