Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Parameter- und die Koordinatenform der Ebene, die die zwei Spurpunkte $S_1(-4|0|0)$ und $S_3(0|0|-5)$ besitzt.

1. Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Sind Punkte S_1, S_2, S_3 (falls vorhanden) Spurpunkte einer zu konstruierenden Ebene E, gilt also: $S_1(p|0|0)$, $S_2(0|q|0)$, $S_3(0|0|r)$ (mit reellen p, q, r und mindestens einer der drei Zahlen ≠ 0), so lässt sich die Ebene sofort in Koordinatenform (Koordinatengleichung: E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$) bestimmen als:

p≠0, q≠0, r≠0 -> Spurpunkte $S_1(p\|0\|0)$, $S_2(0\|q\|0)$, $S_3(0\|0\|r)$	E: $\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2+\frac{1}{r}x_3=1$
p≠0, q≠0 -> Spurpunkte $S_1(p\|0\|0)$, $S_2(0\|q\|0)$	E: $\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2=1$
p≠0, r≠0 -> Spurpunkte $S_1(p\|0\|0)$, $S_3(0\|0\|r)$	E: $\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{r}x_3=1$
q≠0, r≠0 -> Spurpunkte $S_2(0\|q\|0)$, $S_3(0\|0\|r)$	E: $\frac{1}{q}x_2+\frac{1}{r}x_3=1$
p≠0 -> Spurpunkt $S_1(p\|0\|0)$	E: $\frac{1}{p}x_1=1$ (E: $x_1 = p$)
q≠0 -> Spurpunkt $S_2(0\|q\|0)$	E: $\frac{1}{q}x_2=1$ (E: $x_2 = q$)
r≠0 -> Spurpunkt $S_3(0\|0\|r)$	E: $\frac{1}{r}x_3=1$ (E: $x_3 = r$)

Ebenengleichung (Koordinatenform) aus Spurpunkten

Aus den (ein bis drei) Spurpunkten lässt sich also eindeutig die Ebene E herleiten.

Aus der Koordinatenform E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ lässt sich die Parameterform der Ebene E herleiten, wenn man die Beziehung $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ als lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und den drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 auffasst. Es sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit a ≠ 0, so dass den Unbekannten x_2, x_3 die reellen Parameter $x_2 = r$, $x_3 = s$ zugewiesen werden können (mehrdeutige Lösung des linearen Gleichungssystems). Dann ist:

$$ax_1+br+cs = d \Leftrightarrow ax_1 = d-br-cs \Leftrightarrow x_1 = (d-br-cs)/a,$$

so dass die Ebenengleichung in Parameterform

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d-br-cs}{a} \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt.

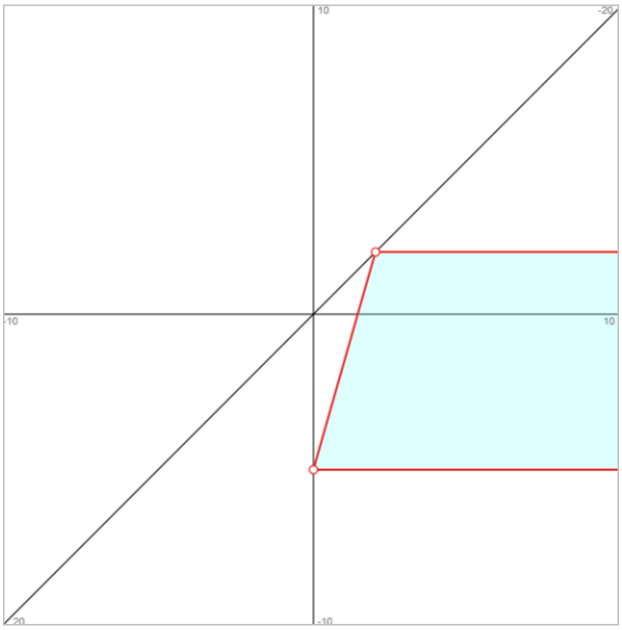
II. Die zwei Punkte $S_1(-4|0|0)$ und $S_3(0|0|-5)$ sind als Achsenabschnittspunkte (jeweils zwei Koordinaten sind 0) Spurpunkte der zu konstruierenden Ebene E in der Koordinatenform, also:

E: $-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{5}x_3=1$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen -4 und -5, d.h. mit -20 ergibt:

E: $5x_1 + 4x_3 = -20$,

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt. Wegen der fehlenden x_2-Komponente in der Ebenengleichung ist die Ebene E zudem parallel zur x_2-Achse. Es ergibt sich also folgende Lage der Ebene im x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem:



III. Die <u>Parameterform</u> der Ebene E ergibt sich aus der Koordinatenform E: $5x_1 + 4x_3 = -20$ vermöge des linearen Gleichungssystems:

$5x_1 + 4x_3 = -20$
$x_2 = r$
$x_3 = s$

mit:

$5x_1 + 4s = -20 \Leftrightarrow 5x_1 = -20-4s \Leftrightarrow x_1 = -4-0{,}8s$

und:

E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-0{,}8s\\r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-0{,}8\\0\\1\end{pmatrix}$.

2. Lösung: I. Allgemein gilt u.a. für die <u>Umformung</u> von der Parameter- in die Koordinatenform einer Ebene:

E: $\vec{x}=\vec{b}+r\vec{u}+s\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{b})=0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x}=\vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)
E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF) -> LGS: $\begin{pmatrix}ax_1+bx_2+cx_3=d\\x_2=r\\x_3=s\end{pmatrix}$ -> E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}d/a\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-b/a\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-c/a\\0\\1\end{pmatrix}$ (PF)
E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{b})=0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x}=\vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ (KF)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

II. Da nur die zwei Spurpunkte $S_1(0|-4|0)$ und $S_3(0|0|-5)$ der zu konstruierenden Ebene laut Aufgabenstellung vorliegen, ist bekannt, dass die Ebene E parallel zur x_2-Achse des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems sein muss. Als Richtungsvektoren (Spannvektoren) der Parameterform der Ebene ergeben sich also:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Parallelität zur x_2-Achse)

$\vec{w} = \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ (Richtungsvektor der Spurgeraden).

Die Parameterform der Ebene lautet mithin:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

III. Zur Bestimmung der Koordinatenform der Ebene E bilden wir das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) der Richtungsvektoren (Spannvektoren) der Ebene:

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Die Koordinatenform errechnet sich unter Zuhilfenahme von Normalenvektor und Stützvektor aus:

E: $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vermittelst Skalarmultiplikation zu:

E: $-5x_1 + 0x_2 - 4x_3 = (-5)\cdot(-4) + 0 + (-4)\cdot 0$
E: $-5x_1 - 4x_3 = 20$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 586