Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, die durch die Punkte P(2|-1|0), Q(0|2|-4) und R(4|0|1) verläuft.

1. Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Drei Punkte P, Q und R bestimmen eine Ebene E, die sich in <u>Koordinatenform</u> (Koordinatengleichung) als:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ bzw. } E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1 \text{ (KF).}$$

darstellen lässt, wenn sie nicht den Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems enthält. Durch Einsetzen der x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten der drei Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$, $R(r_1|r_2|r_3)$ in die Gleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ ergibt sich dabei ein lineares Gleichungssystem:

$$\text{(I) } ap_1+bp_2+cp_3 = 1$$
$$\text{(II) } aq_1+bq_2+cq_3 = 1$$
$$\text{(III) } ar_1+br_2+cr_3 = 1$$

das etwa mit dem Gauß-Algorithmus zu lösen ist, wobei die Unbekannten a, b, c zu ermitteln sind.

II. Die drei Punkte P(2|-1|0), Q(0|2|-4) und R(4|0|1) definieren die zu ermittelnde Ebene E vermöge des Ansatzes in der <u>Koordinatenform</u>:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$.

Einsetzen der drei Punkte in den Ansatz ergibt das nachstehende lineare Gleichungssystem und dessen Lösung mit dem Gauß-Algorithmus:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 2a - 1b = 1$

$+ 2b - 4c = 1$

$+ 4a + 1c = 1$

<u>Anfangstableau</u>:

2 -1 0 | 1
0 2 -4 | 1
4 0 1 | 1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*3*) - 2*(*1*)

2 -1 0 | 1
0 2 -4 | 1
0 2 1 | -1

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) - 1*(*2*)

2 -1 0 | 1
0 2 -4 | 1
0 0 5 | -2

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 2a - 1b = 1$

$+ 2b - 4c = 1$

$+ 5c = -2$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$c = -2/5$

$b = -3/10$
$a = 7/20$

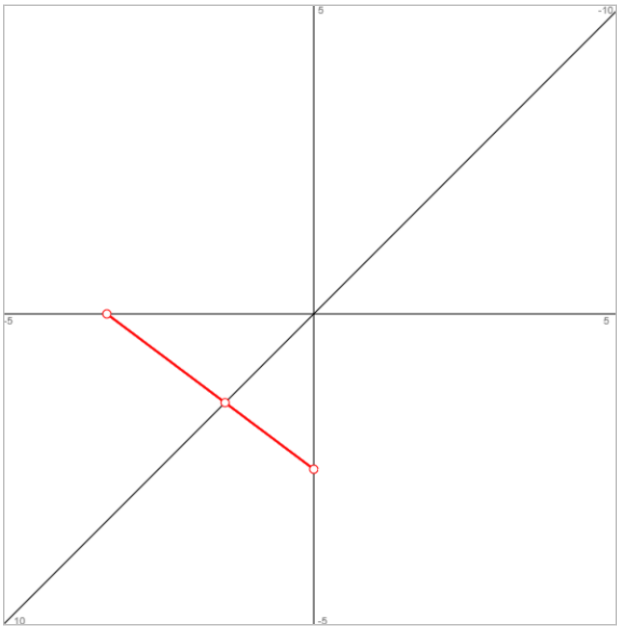
Die Ebene E hat also die Koordinatenform:

E: $\frac{7}{20}x_1 - \frac{3}{10}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = 1.$

Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 20, 10 und 5, d.h. mit 20 ergibt:

E: $7x_1 – 6x_2 – 8x_3 = 20$,

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt.



2. Lösung: I. Unabhängig davon, ob die Ebene den Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems enthält, gilt die folgende Vorgehensweise, wenn drei Punkte P, Q, R vorgegeben sind:

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$ (Kreuz-, Vektorprodukt bilden)

Ebenengleichung: E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$ (NF, Skalarprodukte ausrechnen)

Ebenengleichung: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF).

II. Nach Bildung der Differenzvektoren:

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie Errechnung des Kreuzprodukts (Vektorprodukts) als Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Ebenengleichung in Koordinatenform als:

E: $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇔ E: $7x_1 – 6x_2 – 8x_3 = 7 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) + (-8) \cdot 0$ ⇔ E: $7x_1 – 6x_2 – 8x_3 = 20$.