Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, die durch die Punkte P(8|12|-4), Q(5|-2|-12) und R(-2|4|8) verläuft.

Lösung: I. Es gilt die folgende Vorgehensweise, wenn drei Punkte P, Q, R vorgegeben sind:

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$ (Kreuz-, Vektorprodukt bilden)

Ebenengleichung: E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{OP}$ (NF, Skalarprodukte ausrechnen)

Ebenengleichung: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF).

II. Nach Bildung der Differenzvektoren:

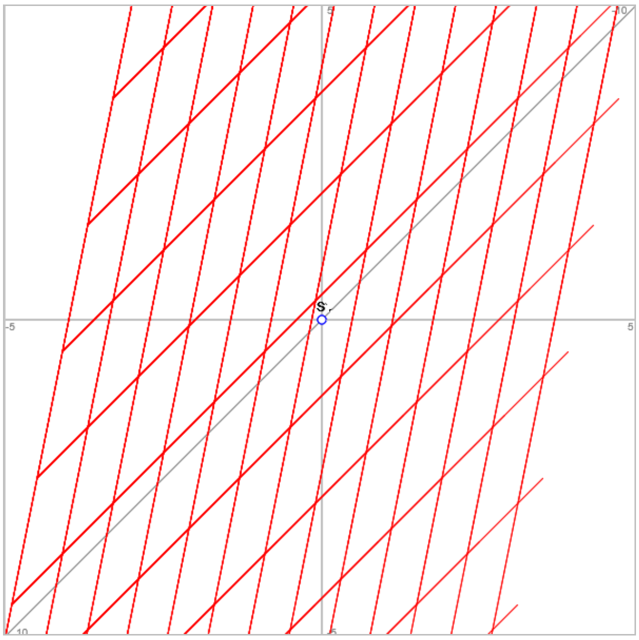
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

sowie Errechnung des Kreuzprodukts (Vektorprodukts) als Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -132 \\ 116 \\ -116 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (Division durch -116)

ergibt sich die Ebenengleichung in Koordinatenform als:

E: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ ⇔ E: $2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 12 + 1 \cdot (-4)$ ⇔ E: $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.



www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 589