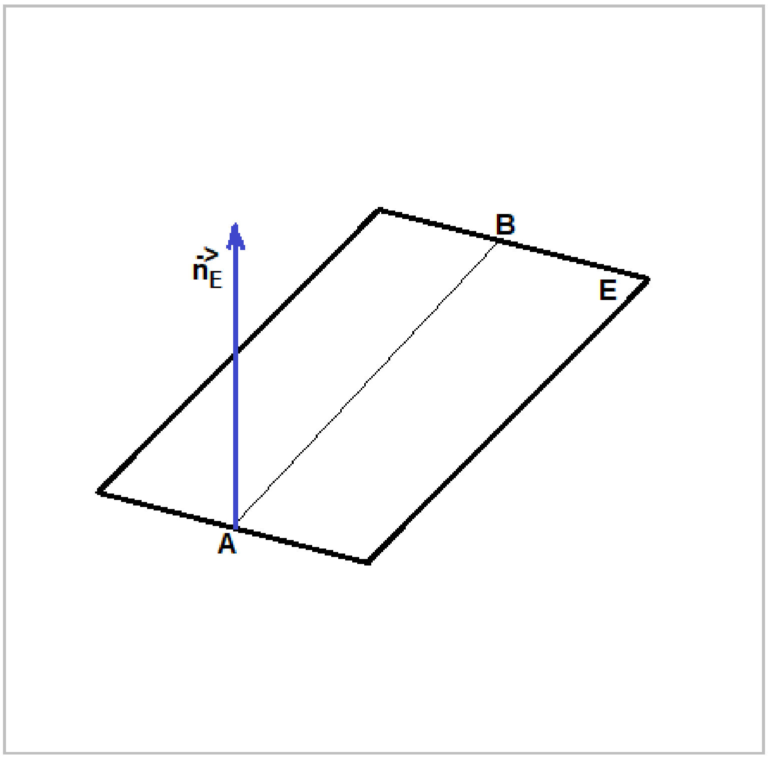
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Welche Ebenen F_1 und F_2 schneiden die Ebene E: $x_1+2x_3 = 0$ in den Punkten A(0|0|0) und B(-2|0|1) in einem 60°-Winkel?

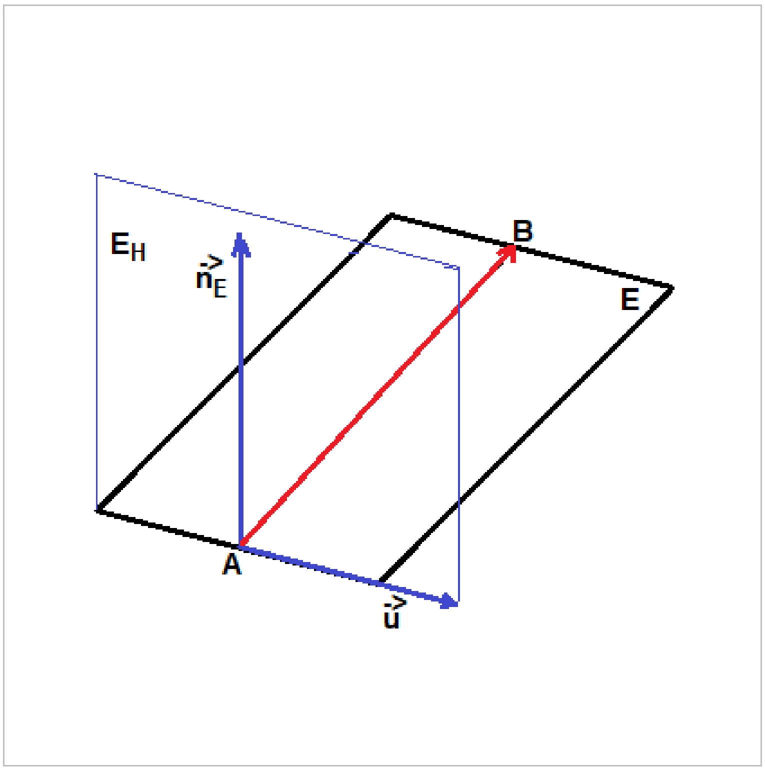
Lösung: I. Die Ebene E: $x_1+2x_3 = 0$ besitzt den Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, der Richtungsvektor zwischen den Ebenenpunkten A(0|0|0) und B(-2|0|1) beträgt: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir haben damit die folgende Ausgangssituation:



II. Wir konstruieren eine Hilfsebene E_H, die den Punkt A(0|0|0) enthält und senkrecht zur Ebene E und zum Vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt. Die Ebene E_H wird in der Parameterform bestimmt. Ein Richtungsvektor (Spannvektor) der Ebene ist der Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zweite Richtungsvektor derjenige, der senkrecht zu diesem Normalenvektor und zum Vektor $\vec{AB}$ steht, also auf Grund des Kreuzprodukts: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$ der Vektor: $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Die Hilfsebene lautet somit:

E_H: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (*)

gemäß der nachstehenden Skizze:



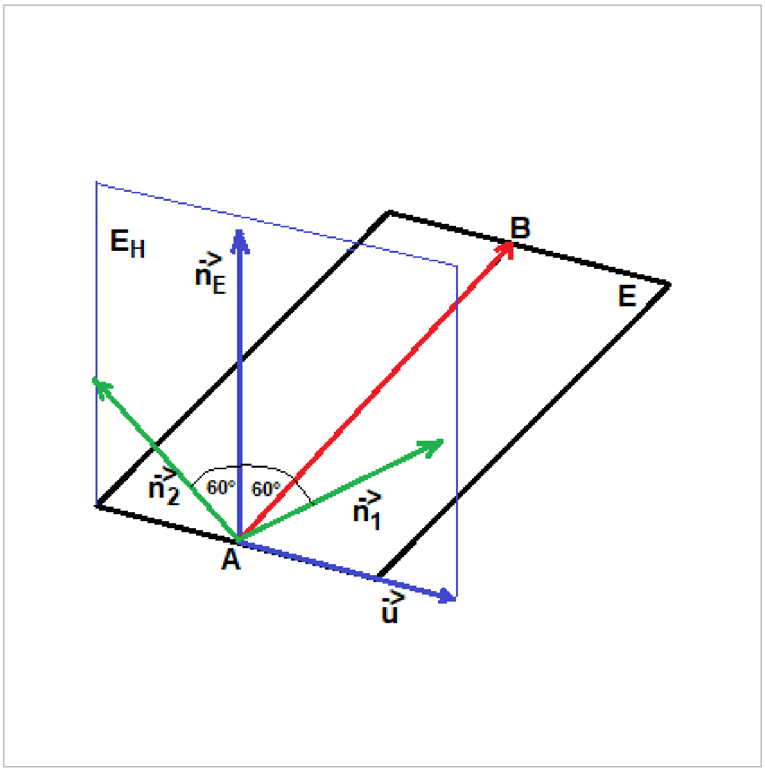
III. Die (zwei) <u>Normalenvektoren</u> $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ der gesuchten Ebene F_1 und F_2 liegen nun in der Ebene E_H im Winkel von 60° zum Normalenvektor $\vec{n_E}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Auf Grund der Parameterform (*) der Hilfsebene E_H hat jeder der gesuchten Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ die Form: $r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\\2r\end{pmatrix}$.

Mit der Division dieses Vektors durch r und Setzen von t = s/r erfolgt die Umparametrisierung des Vektors zu: $\begin{pmatrix}1\\t\\2\end{pmatrix}$. Diesen Vektor verwenden wir, um auf der Grundlage der Skalarproduktfomel zur Berechnung von Schnittwinkeln: $\cos\varphi=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$ (für Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$) bei einem Winkel von φ = 60° zwischen den Vektoren $(\vec{a} =) \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $(\vec{b} =) \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ die Unbekannte t zu bestimmen:

$$\cos 60° = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1+0+4|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+t^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5+t^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+t^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+t^2}} \Leftrightarrow \sqrt{5+t^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5+t^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = 15 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{15}$$

Der Winkel φ zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_1$ bzw. $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_2$ ist dann selbstverständlich der Schnittwinkel zwischen den Ebenen E und F_1 bzw. E und F_2. Für t = ±√15 ergeben sich damit als Normalenvektoren der gesuchten Ebenen F_1 und F_2: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$ gemäß der nachstehenden Skizze:

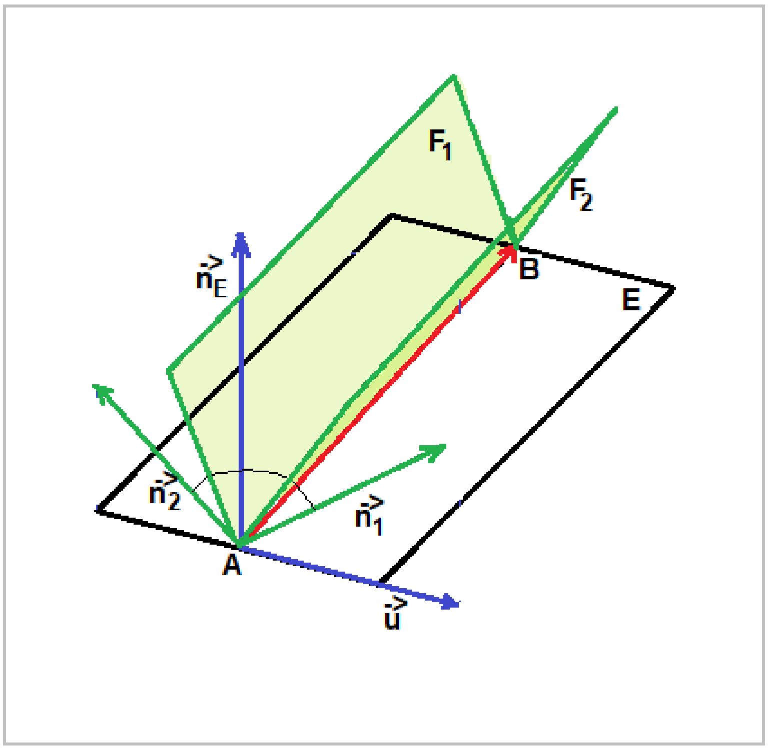


IV. Die gesuchten Ebenen haben auf Grund der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$ und des Ortsvektors $\vec{OA}$ zum Punkt A(0|0|0) als Stützvektor die <u>Ebenengleichungen</u>:

$F_1: \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ => F_1: $x_1 + x_2\sqrt{15} + 2x_3 = 0$

$F_2: \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ => F_2: $x_1 - x_2\sqrt{15} + 2x_3 = 0$

gemäß nachstehender Abbildung:



www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 628