Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: a) Ergänze das Dreieck ΔABC mit A(0|0|3), B(0|4|1), C(2|4|5) zum Parallelogramm ABCD.

b) In welcher Ebene E liegen Dreieck ΔABC und Parallelogramm ABCD?

c) Liegt der Punkt P(1,5|1|5,5) auf der Ebene E und innerhalb des Parallelogramms ABCD?

Lösung: a) Aus der Parallelogrammbeziehung ergibt sich für die Berechnung der fehlenden Parallelogrammecke D: $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ als D(2|0|7).

b) Wir errechnen die Parameterform der gesuchten Ebenengleichung mit Hilfe der Ecken des Parallelogramms ABCD: A(0|0|3), B(0|4|1), D(2|0|7) und erhalten:

E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] + s\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Wir beachten mit Bezug auf Aufgabe c), dass das Parallelogramm ABCD durch die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ aufgespannt wird.

c) Der Punkt P liegt auf der Ebene E, wenn die Punktprobe $\vec{OP} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AD}$ (Verwendung der Parameterform der Ebenengleichung) zu Lösungen für die Parameter r und s führt. Gilt zusätzlich 0 ≤ r, s ≤ 1, so liegt der Punkt P innerhalb des Parallelogramms ABCD, gilt doch für dessen Ecken die nachstehende Übersicht:

A(0|0|3) (r=0, s=0)
B(0|4|1) (r=0, s=1)
C(2|4|5) (r=1, s=1)
D(2|0|7) (r=1, s=0).

Aus $\vec{OP} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AD}$ folgt zunächst:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen die Gleichung zunächst um zu:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

und erhalten somit ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei Unbkannten r, s:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} & & +\ 2s & = & 1.5 \\ +\ 4r & & & = & 1 \\ -\ 2r & & +\ 4s & = & 2.5 \end{array}$$

Anfangstableau:

r	s	|	R.S.
0	2	|	1.5
4	0	|	1
-2	4	|	2.5

Zeilentausch: (*1*) <-> (*2*) /

4	0	|	1
0	2	|	1.5
-2	4	|	2.5

1. Schritt: 2*(*3*) + 1*(*1*) /

4	0	|	1
0	2	|	1.5
0	8	|	6

2. Schritt: 1*(*3*) - 4*(*2*) /

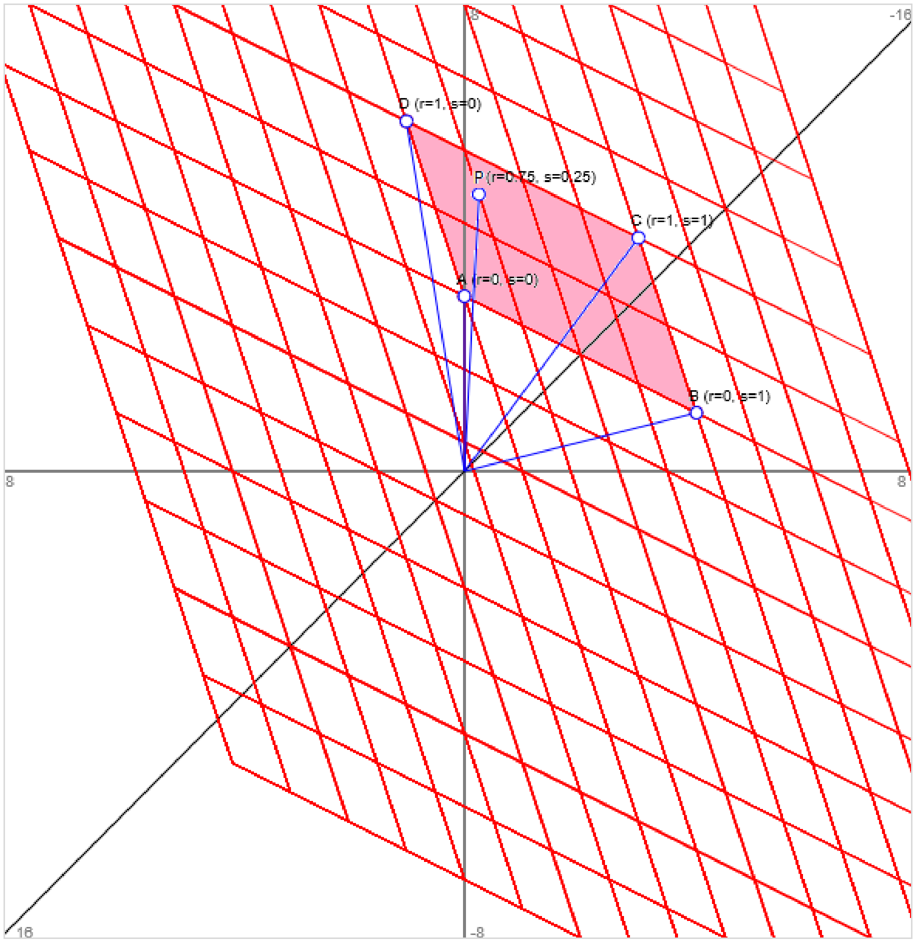
4	0	|	1
0	2	|	1.5
0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} +\ 4r & & & = & 1 \\ & & +\ 2s & = & 1.5 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$s = 0.75 = 3/4$
$r = 0.25 = 1/4$



Der Punkt P lässt sich darstellen als Linearkombination: $\overset{->}{OP} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Der Punkt liegt auf der Ebene E und wegen: $0 \le r=0{,}25,\ s=0{,}75 \le 1$ auch im Parallelogramm ABCD.

www.michael-buhlmann.de / 06.2019 / Aufgabe 875