Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Ebenen, die zum Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems den Abstand 2 haben und die die Gerade:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Lösung: I. Ebenen, die vom Ursprung O(0|0|0) den Abstand 2 haben, sind Tangentialebenen E zur Kugel K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 = 4$ mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius r = 2. Jeder Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ auf der Kugel K erfüllt die Bedingung $\left|\vec{OP}\right|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4$; weiter ist $\vec{OP}$ der Normalenvektor der Tangentialebene, so dass die Normal- bzw. Koordinatenform:

E: $\left(\vec{x} - \vec{OP}\right)\vec{OP} = 0$ ⇔ E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$ ⇔ E: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4$ (*)

greift.

II. Wir suchen die Tangentialebenen, auf denen die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ liegt, d.h. z.B. die Punkte A(2|3|4) (t=0) und B(6|5|16) (t=1) liegen. Einsetzen der Punktkoordinaten von A und B als x_1, x_2, x_3 in die Koordinatengleichung (*) ergibt:

$2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 4$
$6p_1 + 5p_2 + 16p_3 = 4$

und damit ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen. Der Gauß-Algorithmus zum Lösen des Gleichungssystems ergibt dann:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+\ 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 4$
$+\ 6p_1 + 5p_2 + 16p_3 = 4$

<u>Anfangstableau</u>:

p₁	*p₂*	*p₃*	*R.S.*
2	3	4	4
6	5	16	4

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 3*(*1*) /

2	3	4	4
0	-4	4	-8

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 4$

$-\ 4p_2 + 4p_3 = -8$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$p_3 = \gamma$
$p_2 = 2 + 1\gamma$
$p_1 = -1 - 3.5\gamma$ (mit reellem Parameter γ).

Stütz- und Normalenvektor der Tangentialebene E genügen also der Form:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} -1-3{,}5\gamma \\ 2+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

III. Nun muss noch gelten: $\left|\vec{OP}\right|^2 = 4$. Mit $p_1 = -1-3.5\gamma$, $p_2 = 2+\gamma$, $p_3 = \gamma$ folgt damit die quadratische Gleichung:

$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4 \Leftrightarrow (-1-3{,}5\gamma)^2 + (2+\gamma)^2 + \gamma^2 = 4$ (**).

Gleichung (**) ist dann unter Verwendung der binomischen Formeln und der abc-Formel nach γ aufzulösen:

$(-1-3{,}5\gamma)^2 + (2+\gamma)^2 + \gamma^2 = 4$	
$(1+3{,}5\gamma)^2 + (2+\gamma)^2 + \gamma^2 = 4$	(Binomische Formeln)
$1+7\gamma+12{,}25\gamma^2 + 4+4\gamma+\gamma^2 + \gamma^2 = 4$	(Zusammenfassen)
$14{,}25\gamma^2 + 11\gamma + 5 = 4$	$\mid -4$
$14{,}25\gamma^2 + 11\gamma + 1 = 0$	(abc-Formel: a=14,25, b=11, c=1)

$$\gamma_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot 14{,}25\cdot 1}}{2\cdot 14{,}25} = \frac{-11\pm\sqrt{121-57}}{28{,}5} = \frac{-11\pm\sqrt{64}}{28{,}5} = \frac{-11\pm 8}{28{,}5}$$

$$\gamma_1 = \frac{-11+8}{28{,}5} = -\frac{3}{28{,}5} = -\frac{6}{57} = -\frac{2}{19},\ \gamma_2 = \frac{-11-8}{28{,}5} = -\frac{19}{28{,}5} = -\frac{38}{57} = -\frac{2}{3}.$$

IV. Wir bestimmen für $\gamma_1 = -\frac{2}{19}$ die (Tangential-) Ebene E_1 gemäß (*) mit $p_3 = -\frac{2}{19}$, $p_2 = \frac{36}{19}$, $p_1 = -\frac{12}{19}$ als:

E_1: $-\frac{12}{19}x_1 + \frac{36}{19}x_2 - \frac{2}{19}x_3 = 4 \Rightarrow E_1$: $6x_1 - 18x_2 + x_3 = -38$.

Genauso folgt für $\gamma_2 = -\frac{2}{3}$ und für $p_3 = -\frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{4}{3}$, $p_1 = \frac{4}{3}$ als Ebene E_2:

E_2: $\frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 4 \Rightarrow E_2$: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$.

Damit sind die zwei Ebenen, die es offensichtlich geben kann, errechnet.

V. Probe: Einsetzen der Punkte A(2|3|4) und B(6|5|16) in die Ebenengleichung E_1 liefert: $6\cdot2-18\cdot3+4 = -38$, $6\cdot6-18\cdot5+16 = -38$, womit neben den Punkten auch die durch die Punkte aufgespannte Gerade g auf E_1 liegt. Außerdem gilt für den Abstand der Ebene zum Ursprung:

$$d(O,E_1) = \frac{|0+38|}{\sqrt{6^2+18^2+1^2}} = \frac{38}{19} = 2$$ (Hessesche Normalform).

Für die Ebene E_2 gilt ebenso: $2\cdot2+2\cdot3-4 = 6$, $2\cdot6+2\cdot5-16 = 6$ zusammen mit:

$$d(O,E_2) = \frac{|0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{6}{3} = 2$$ (Hessesche Normalform).