Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, die durch die Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$ verläuft.

1. Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Drei Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E, die sich in <u>Koordinatenform</u> (Koordinatengleichung) als:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ (KF).}$$

darstellen lässt, ein Ansatz, der trägt, wenn die Ebene nicht den Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems enthält. Durch Einsetzen der x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten der drei Punkte $A(p_1|p_2|p_3)$, $B(q_1|q_2|q_3)$, $C(r_1|r_2|r_3)$ in die Gleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ bei Vorgabe eines gewissen d (≠ 0; etwa d = 1) ergibt sich dabei ein lineares Gleichungssystem:

$$\text{(I) } ap_1+bp_2+cp_3 = d$$
$$\text{(II) } aq_1+bq_2+cq_3 = d$$
$$\text{(III) } ar_1+br_2+cr_3 = d$$

das im Falle vorgegebener Spurpunkte sofort zum Ergebnis führt, wobei die Unbekannten a, b, c zu ermitteln sind.

II. Die drei Punkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$ definieren die zu ermittelnde Ebene E vermöge des Ansatzes in der <u>Koordinatenform</u>:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 12$

bei Vorgabe etwa von d = 12 (als kleinstes gemeinsames Vielfaches der Punktkoordinaten 4, 3 und 2). Einsetzen der drei Punkte in den Ansatz ergibt das nachstehende lineare Gleichungssystem mit sofort ablesbarer Lösung:

<u>Ansatz</u>: Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 12$

Einsetzen der Punkte A(4|0|0), B(0|3|0), C(0|0|2) ->

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

+	4*a*					=	12
		+	3*b*			=	12
				+	2*c*	=	12

<u>Anfangs-/Endtableau</u>:

4	0	0	|	12
0	3	0	|	12
0	0	2	|	12

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$c = 6$
$b = 4$
$a = 3$
-> Ebene: E: $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$.

Die Ebene E hat also die Koordinatenform:

E: $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$.

2. Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Drei Spurpunkte $S_1(p|0|0)$, $S_2(0|q|0)$ und $S_3(0|0|r)$ bestimmen eine Ebene E, die sich in Koordinatenform als:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1 \text{ (KF).}$$

darstellen lässt bzw. sofort bestimmen lässt als:

$$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1.$$

II. Die drei Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$ sind die Achsenabschnittspunkte (jeweils zwei Koordinaten sind 0) der zu konstruierenden Ebene E der Koordinatenform:

$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$.

Also bestimmen sich: a = 1/4, b = 1/3, c = 1/2, so dass die Ebene E durch die Gleichung:

$E: \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1$

beschrieben werden kann. Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 4, 3 und 2, d.h. mit 12 ergibt:

$E: 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$,

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt.

www.michael-buhlmann.de / 01.2022 / Aufgabe 1554