

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, die durch die Spurpunkte $S_2(0|5|0)$ und $S_3(0|0|-6)$ verläuft.

Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Sind Punkte S_1, S_2, S_3 (falls vorhanden) Spurpunkte einer zu konstruierenden Ebene E , gilt also: $S_1(p|0|0), S_2(0|q|0), S_3(0|0|r)$ (mit reellen p, q, r und mindestens einer der drei Zahlen $\neq 0$), so lässt sich die Ebene sofort in Koordinatenform (Koordinatengleichung: $E: ax_1+bx_2+cx_3 = d$) bestimmen als:

$p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_2(0 q 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$p \neq 0, q \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_2(0 q 0)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 = 1$
$p \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_1(p 0 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$q \neq 0, r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkte $S_2(0 q 0), S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1$
$p \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_1(p 0 0)$	$E: \frac{1}{p}x_1 = 1$ ($E: x_1 = p$)
$q \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_2(0 q 0)$	$E: \frac{1}{q}x_2 = 1$ ($E: x_2 = q$)
$r \neq 0 \rightarrow$ Spurpunkt $S_3(0 0 r)$	$E: \frac{1}{r}x_3 = 1$ ($E: x_3 = r$)

Ebenengleichung (Koordinatenform) aus Spurpunkten

Aus den (ein bis drei) Spurpunkten lässt sich also eindeutig die Ebene E herleiten.

II. Die drei Spurpunkte $S_2(0|5|0)$ und $S_3(0|0|-6)$ sind die Achsenabschnittspunkte (jeweils zwei Koordinaten sind 0) der zu konstruierenden Ebene E der Koordinatenform:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1.$$

Also bestimmen sich: $a = 0, b = 1/5, c = -1/6$, so dass die Ebene E durch die Gleichung:

$$E: \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{6}x_3 = 1$$

beschrieben werden kann. Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 5 und 6, d.h. mit 30 ergibt:

$$E: 6x_2 - 5x_3 = 30,$$

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt.