Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

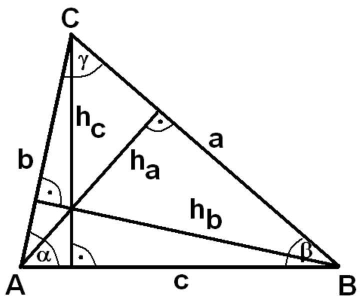
Aufgabe: Mit a, b, c, d > 0 ist die Ebene E in Koordinatenform mit:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

gegeben. Zeige: Die Spurpunkte S_1, S_2, S_3 der Ebene als Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems bilden nie ein rechtwinkliges Dreieck.

Lösung: I. Für ein Dreieck ΔABC im x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem stellen die Differenzvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ die Seiten des Dreiecks c, b, a dar. Für die (spitzen, stumpfen) Winkel α (bei A), β (bei B) und γ (bei C) gelten dann die Beziehungen:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},\ \cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|},\ \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$



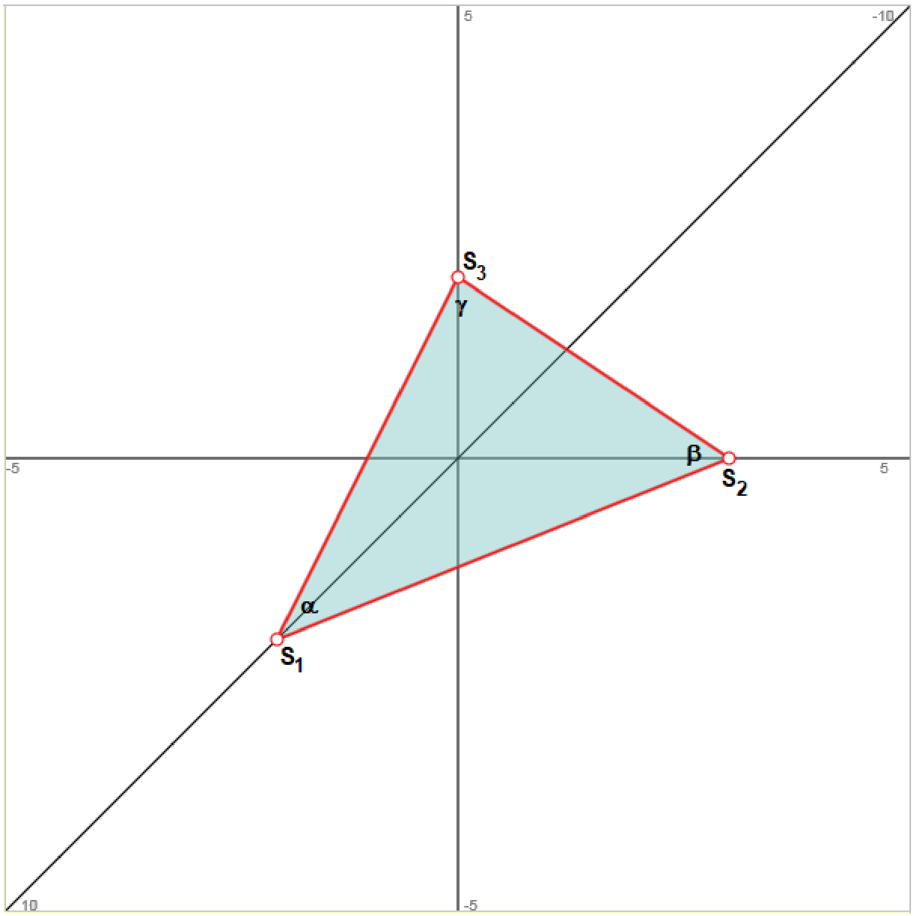
II. Allgemein gilt hinsichtlich der Ermittlung der Spurpunkte die folgende Vorgehensweise. Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

x_1-Achse: Spurpunkt $S_1(d/a|0|0)$ bei $a\neq 0$
x_2-Achse: Spurpunkt $S_2(0|d/b|0)$ bei $b\neq 0$
x_3-Achse: Spurpunkt $S_3(0|0|d/c)$ bei $c\neq 0$.

III. Die Spurpunkte S_1, S_2, S_3 als Schnittpunkte der Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit der x_1-, x_2- bzw. x_3-Koordinatenachse bilden im Fall a, b, c, d > 0 das Dreieck $\Delta S_1S_2S_3$ im ersten Oktanten des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems. Wegen $S_1(d/a|0|0)$, $S_2(0|d/b|0)$, $S_3(0|0|d/c)$ errechnen sich die Differenzvektoren als:

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix}0\\ d/b\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}d/a\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-d/a\\ d/b\\ 0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ d/c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}d/a\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-d/a\\ 0\\ d/c\end{pmatrix},\ \overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ d/c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ d/b\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -d/b\\ d/c\end{pmatrix}.$$

Die Differenzvektoren stellen die Seiten des Dreiecks $\Delta S_1S_2S_3$ dar.



Hinsichtlich der drei Winkel α, β, γ des Dreiecks gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_1S_3}}{\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_1S_3}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -d/a \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -d/a \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix}\right|} = \frac{-\frac{d}{a}\cdot\left(-\frac{d}{a}\right)+\frac{d}{b}\cdot 0+0\cdot\frac{d}{c}}{\sqrt{\left(-\frac{d}{a}\right)^2+\left(\frac{d}{b}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{d}{a}\right)^2+0^2+\left(\frac{d}{c}\right)^2}} =$$

$$\frac{\frac{d^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{d^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{a^2}+\frac{d^2}{c^2}}} = \frac{\frac{d^2}{a^2}}{d\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\cdot d\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}} =$$

$$\frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\cdot a\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}}} > 0$$

$$\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_2S_3}}{\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_2S_3}\right|} = -\frac{\begin{pmatrix} -d/a \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -d/b \\ d/c \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -d/a \\ d/b \\ 0 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -d/b \\ d/c \end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{d^2}{b^2}}{\sqrt{\frac{d^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{b^2}+\frac{d^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}}} > 0$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{S_1S_3}\cdot\overrightarrow{S_2S_3}}{\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_2S_3}\right|} = -\frac{\begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -d/b \\ d/c \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ d/c \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -d/b \\ d/c \end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{d^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{d^2}{a^2}+\frac{d^2}{c^2}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{b^2}+\frac{d^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}} > 0$$

Alle errechneten Kosinuswerte sind positiv und damit ungleich 0; es gilt:

$0 < \cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma) < 1$.

Es treten somit nur spitze Winkel im Dreieck $\Delta S_1S_2S_3$ auf. Das Dreieck kann damit niemals rechtwinklig sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1725