Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenenschar/-büschel

Aufgabe: Gegeben sei das Ebenenbüschel:

$$E_a: ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$$

für alle reellen Zahlen a.

a) Zeichne die Ebenen E_0, E_1, E_2 in ein passendes x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem. Zeige, dass sich alle Ebenen E_a in einer Schnittgerade s schneiden.

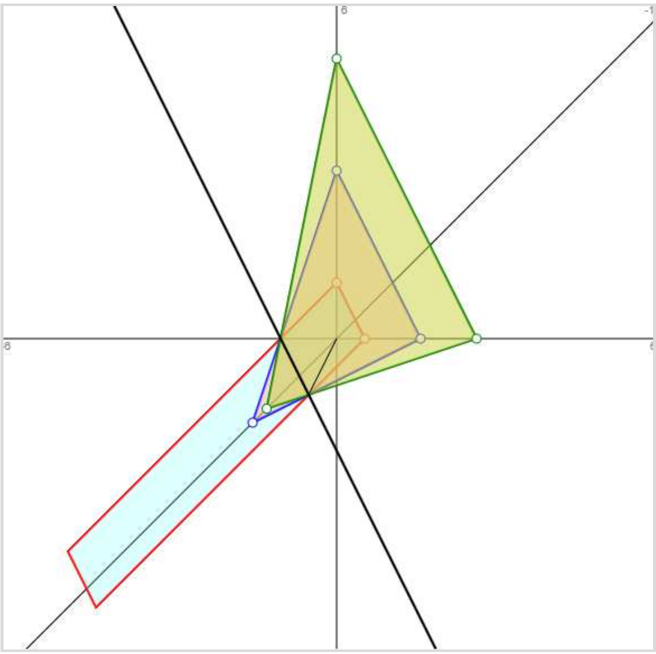
b) Auf welcher Ebene E_a liegt der Ursprung des Koordinatensystems? Welche Ebenen E_a haben zum Ursprung des Koordinatensystems den Abstand 1?

c) Zeige, dass es zur Ebene E_4 eine senkrechte Ebene E_a gibt. Es gibt weiter eine Ebene E_a, zu der es keine senkrechte Ebene des Ebenenbüschels gibt. Wie lautet die senkrechte Ebene F, die nicht zum Ebenenbüschel E_a gehört, aber die Schnittgerade s des Ebenenbüschels enthält?

Lösung: a) I. Das Einsetzen von a=0, a=1, a=2 in: E_a: $ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$ ergibt als Ebenengleichungen mit den entsprechenden Spurpunkten:

E_0: $2x_2 + x_3 = 1$ -> $S_{02}(0|0,5|0)$, $S_{03}(0|0|1)$
E_1: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ -> $S_{11}(3|0|0)$, $S_{12}(0|1,5|0)$, $S_{13}(0|0|3)$
E_2: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ -> $S_{21}(2,5|0|0)$, $S_{12}(0|2,5|0)$, $S_{13}(0|0|5)$.

Wir erhalten auf der Grundlage der ermittelten Spurpunkte:



II. Zur Ermittlung der Schnittgeraden s des Ebenenbüschels E_a bestimmen wir zunächst die Schnittgerade zwischen zwei Ebenen, z.B. mit a=0 und a=1 die Schnittgerade zwischen den Ebenen:

E_0: $2x_2 + x_3 = 1$
E_1: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$.

Gemäß den Koordinatengleichungen der vorgegebenen Ebenen E_0 und E_1 ergibt sich lineare Gleichungssystem:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$2x_2 + x_3 = 1$

mit Parameter $x_3 = t$ und den weiteren Lösungen:

$2x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow 2x_2 + t = 1 \Leftrightarrow 2x_2 = 1-t \Leftrightarrow x_2 = 0{,}5-0{,}5t$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow x_1 + 2(0{,}5-0{,}5t) + t = 3 \Leftrightarrow x_1 + 1 - t + t = 3 \Leftrightarrow x_1 + 1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 2$.

Die gesuchte Schnittgerade s der Ebenen E_0 und E_1 lautet mit: $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5-0{,}5t$, $x_3 = t$:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5-0{,}5t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III. In einem 2. Schritt zeigen wir, dass die gefundene <u>Gerade</u> s <u>auf allen Ebenen</u> E_a des Ebenenbüschels liegt. Dann ist die Gerade auch Schnittgerade aller dieser Ebenen. Wir gehen dazu wie folgt vor und schneiden Gerade und beliebige Ebene E_a miteinander:

Gerade s -> $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5-0{,}5t$, $x_3 = t$ -> Ebene E_a ->
$a\cdot 2 + 2(0{,}5-0{,}5t) + t = 2a + 1 - t + t = 2a + 1$ als allgemein gültige Aussage (für jedes reelle t, a).

Die Gerade s ist damit Teil jeder Ebene E_a: $s \subset E_a$ für allen reellen Zahlen a.

b) I. Der Ursprung des Koordinatensystems ist O(0|0|0). Punktprobe von $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ in:
E_a: $ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$ ergibt:

$0 = 2a + 1 \Leftrightarrow -1 = 2a \Leftrightarrow a = -0{,}5$,

so dass die Ebene $E_{-0,5}$: $-0{,}5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ den <u>Koordinatenursprung</u> enthält.

II. Zur Abstandsbestimmung zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ verwenden wir die <u>Hessesche Normalform</u>:

$$d(P,E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

III. Wir verwenden die Hessesche Normalform und ermitteln aus dem Ansatz $d(O,E_a) = 1$ die entsprechenden Parameter a wie folgt:

$d(O,E_a) = 1$

$\frac{|a\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 - (2a+1)|}{\sqrt{a^2 + 2^2 + 1^2}} = 1$

$\frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+5}} = 1$ $\qquad | \cdot\sqrt{a^2+5}$

$|2a+1| = \sqrt{a^2+5}$ $\qquad | ()^2$

$(2a+1)^2 = a^2+5$

$4a^2 + 4a + 1 = a^2 + 5$ $\qquad | -a^2$

$3a^2 + 4a + 1 = 5$ $\qquad | -5$

$3a^2 + 4a - 4 = 0$ $\qquad$ (abc-Formel: a = 3, b = 4, c = -4)

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{-4\pm 8}{6} = \frac{-2\pm 4}{3}$$

$a_1 = \frac{-2-4}{3} = \frac{-6}{3} = -2$, $a_2 = \frac{-2+4}{3} = \frac{2}{3}$.

Die gesuchten Ebenen lauten damit:

E_{-2}: $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3$
$E_{2/3}$: $2x_1/3 + 2x_2 + x_3 = 7/3$.

c) I. Die Ebene E_4 ergibt sich durch Einsetzen von a=4 in: E_a: $ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$ als:
E_4: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$.

Der Normalenvektor der Ebene E_4 ist: $\vec{n_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, der Normalenvektor einer beliebigen Ebene E_a des Ebenenbüschels: $\vec{n_a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen der Orthogonalität zwischen der Ebene E_4 und der gesuchten Ebene E_a muss gelten:

$E_4 \perp E_a$ -> $\vec{n_4} \cdot \vec{n_a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a + 4 + 1 = 4a + 5 = 0$ ⇔ 4a = -5 ⇔ a = -1,25.

Die zur Ebene E_4 orthogonale Ebene des Ebenenbüschels lautet also:
$E_{-1,25}$: $-1{,}25x_1 + 2x_2 + x_3 = -1{,}5$.

II. Allgemein errechnet sich die zur Ebene E_a: $ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$ gehörende orthogonale Ebene E_α: $\alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\alpha + 1$ des Ebenenbüschels auf Grund von:

$\vec{n_a} \cdot \vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\alpha + 4 + 1 = a\alpha + 5 = 0$ ⇔ $a\alpha = -5$ ⇔ $\alpha = -\frac{5}{a}$, $a \neq 0$,

als:

$E_{-5/a}$: $-\frac{5}{a}x_1 + 2x_2 + x_3 = -\frac{10}{a} + 1$, $a \neq 0$.

Für a= 0 gibt es aber keine senkrechte Ebene, die zur Ebene E_0: $2x_2 + x_3 = 1$.

III. Die nicht zum Ebenenbüschel gehörende Ebene F: $x_1 = 2$ steht senkrecht auf der Ebene E_0: $2x_2 + x_3 = 1$. Wir erhalten die Ebene F, indem wir bei $a \neq 0$ die Gleichungen der Ebenen des Ebenenbüschels durch Division mit a umschreiben als:

E_a: $x_1 + \frac{2}{a}x_2 + \frac{1}{a}x_3 = 2 + \frac{1}{a}$.

Für a->±∞ folgt:

E_a: $x_1 + \frac{2}{a}x_2 + \frac{1}{a}x_3 = 2 + \frac{1}{a}$ -> $x_1 + 0 + 0 = 0+2$ -> F: $x_1 = 2$.

Wegen $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist: $\vec{n_0} \cdot \vec{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$. Die Ebene F steht also orthogonal auf der Ebene E_0. Weiter ist die Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Teil der Ebene F; es gilt nämlich:

Gerade s -> $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5-0{,}5t$, $x_3 = t$ -> Ebene F -> 2 = 2
und damit eine allgemein gültige Aussage. Die Ebene F ergänzt und vervollständigt mithin das Ebenenbüschel E_a: $ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2a + 1$.