

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Exponentialgleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung:

$$e^{2x} - e^x = 0.$$

Lösung: I. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Exponenten steht. Die Basis der Potenz ist die Eulersche Zahl e . Allgemein gilt für das Lösen von einfachen Exponentialgleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x , die folgende Vorgehensweise: Einfache Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x , die der Form $ae^{kx+l} - b = 0$ bzw. $ae^{kx+l} = b$ (*) mit reellen Zahlen a, b, k, l genügen. Die Lösung

der Gleichung (*) ist für $a \cdot b > 0, k \neq 0$ dann: $x = \frac{1}{k} \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) - l \right)$. Um die Lösung einer Gleichung

der Form (*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung. Insbesondere ist die Gleichung (*) in die Form $e^{kx+l} = b/a$ zu bringen, so dass Logarithmieren mit dem natürlichen Logarithmus $\ln()$ zu: $kx+l = \ln(b/a)$ führt.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen und dem natürlichen Logarithmieren wie folgt vor:

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - e^x = 0 & | \text{ Ausklammern} \\ e^x (e^x - 1) = 0 & | :e^x \text{ (möglich, da } e^x > 0 \text{) oder: Satz vom Nullprodukt} \\ e^x - 1 = 0 & | +1 \\ e^x = 1 & | \ln() \\ x = \ln 1 = 0 & \end{array}$$

Wir erhalten den Wert $x = 0$ als Lösung; Lösungsmenge ist also: $L = \{0\}$.