Michael Buhlmann

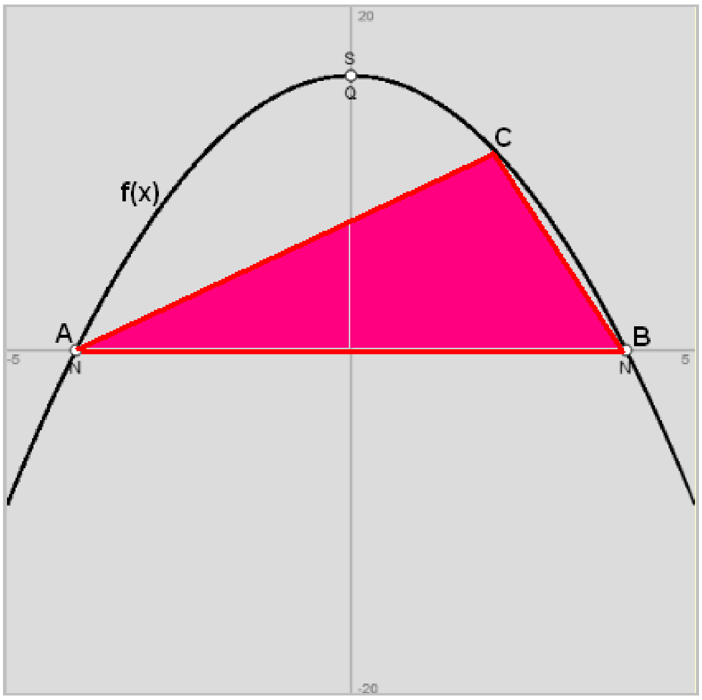
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Extremwertaufgabe

Aufgabe: Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel f(x) = 16 – x^2. Bei einem Dreieck ∆ABC sind die Eckpunkte A und B die Nullstellen der Funktion, der Eckpunkt C liegt auf der Funktion oberhalb der x-Achse.

a) Bestimme den Eckpunkt C so, dass der Umfang des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist der maximale Umfang?

b) Bestimme den Eckpunkt C so, dass die Fläche des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung: Wir gehen aus von folgender Situation mit Funktion f(x) = 16 – x^2 und Dreieck ∆ABC:



Die Punkte A, B, C haben u.a. wegen:
f(x) =0 ⇔ 16 – x^2 = 0 ⇔ 16 = x^2 ⇔ x = ±4
das Aussehen: A(-4|0), B(4|0), C(u|f(u)) mit -4 ≤ u ≤ 4.

a) I. Der Dreiecksumfang errechnet sich als U = a + b + c mit den Seiten:

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(u-4)^2 + (f(u)-0)^2} = \sqrt{(u-4)^2 + (16-u^2)^2} \text{ LE}$$

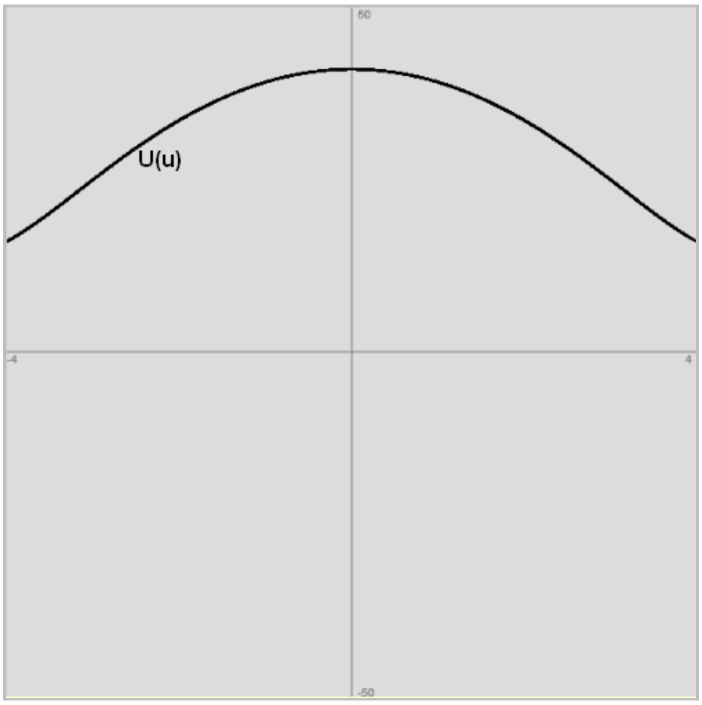
$$b = \overline{AC} = \sqrt{(u-(-4))^2 + (f(u)-0)^2} = \sqrt{(u+4)^2 + (16-u^2)^2} \text{ LE}$$

$$c = \overline{AB} = 8 \text{ LE}$$

und damit als:

$$U(u) = \sqrt{(u-4)^2 + (16-u^2)^2} + \sqrt{(u+4)^2 + (16-u^2)^2} + 8 \text{ LE}$$

II. Wir bestimmen das Maximum der Funktion U(u) im Intervall [-4; 4] und erhalten z.B. auf Grund von U'(u) = 0 ⇔ u = 0 und U''(0) < 0 ein relatives Maximum H(0|U(0)) = H(0|40,985) mit maximalen Dreiecksumfang U = 40,985 LE. Wegen U(-4) = U(4) = 16 LE (Randstellen des Intervalls [-4; 4]) ist das relative Maximum auch ein globales, so dass C(0|16) der gesuchte Punkt ist und das Dreieck ein achsensymmetrisches.



b) I. Die <u>Dreiecksfläche</u> A = gh/2 mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

g = 8 LE
h = f(u) = 16 – u^2 LE

als:

A(u) = 8·(16–u^2)/2 = 4·(16–u^2) FE.

II. Das <u>Maximum</u> von A(u) bestimmt sich mit: A‘(u) = 4·(-2u) = -8u = 0 ⇔ u = 0 und A‘‘(u) = -8 < 0 für u = 0 als: A(0) = 8·16/2 = 64 FE als maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls [-4; 4] A(-4) = A(4) = 0 FE gilt. C(0|16) ist der gesuchte Punkt und das Dreieck ein achsensymmetrisches.

www.michael-buhlmann.de / 05.2016 / Aufgabe 242