Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2y^2 - y^4 + \sin x .$$

Bestimme alle lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion.

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

die 2. partiellen Ableitungen. Dabei gilt unter der Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

d.h.: die gemischten 2. Ableitungen sind identisch, die Reihenfolge der Differentiation austauschbar.

II. Mit Hilfe der 1. und 2. partiellen Ableitungen lassen sich dann relative Extremwerte (Maxima, Minima) und Sattelpunkte von Funktionen mit zwei Veränderlichen f(x,y) wie folgt bestimmen:

1) Bilde die 1. (und 2.) partiellen Ableitungen zu f(x,y) als:

$$f_x(x,y), \ f_y(x,y); \ f_{xx}(x,y), \ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y), \ f_{yy}(x,y).$$

2) Setze die 1. partiellen Ableitungen gleich null (notwendige Bedingung):

$$f_x(x,y) = 0, \ f_y(x,y) = 0$$

Das Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten x, y ist nach den Unbekannten aufzulösen. Man erhält eine Anzahl von Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), …

3) Die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), … werden in die 2. partiellen Ableitungen eingesetzt, so dass der Term

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_i, y_i) & f_{xy}(x_i, y_i) \\ f_{xy}(x_i, y_i) & f_{yy}(x_i, y_i) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_i, y_i) \cdot f_{yy}(x_i, y_i) - f_{xy}^2(x_i, y_i) \text{ (i=1,2,…)}$$

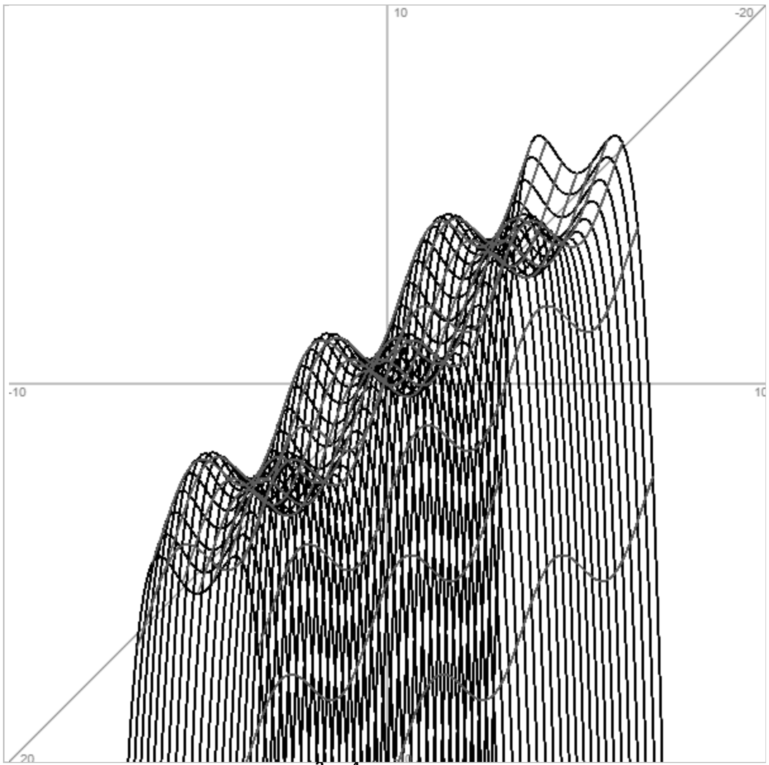
ausgewertet werden kann. D ist dabei die Determinante der Hesse-Matrix. Dann gilt für einen Punkt (x_i, y_i) (i=1,2,…):

a) D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i, y_i) > 0$ ein relativer Tiefpunkt vor.
   D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i, y_i) < 0$ ein relativer Hochpunkt vor.

b) D = 0: Es ist keine Entscheidung möglich.

c) D < 0: Es liegt ein Sattelpunkt vor.

III. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $f(x, y) = 2y^2 - y^4 + \sin x$:



z = f(x,y) = $2y^2 - y^4 + \sin(x)$, $-10 \le x, y, z \le 10$

IV. Wir bilden die partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x, y) = 2y^2 - y^4 + \sin x$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4y - 4y^3$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -\sin x$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 4 - 12y^2$$

V. Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen ergibt die kritischen Stellen, an denen lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = 2y^2 - y^4 + \sin x$ vorliegen können:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x = 0$ => x = $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kε**Z**

$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y - 4y^3 = 0$ => 4y(1-y^2) = 0 => y = 0, 1-y^2 = 0 => y = 0, y^2 = 1

=> y = 0, y = ±1

Die unendlich vielen kritischen Stellen ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1), ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 0), ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 1), kε**Z**, liegen im x-y-Koordinatensystem auf drei zur x-Achse parallelen Geraden (y = -1, y = 0, y = 1) (siehe VI.).

VI. Die Untersuchung der kritischen Stellen mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix H = $\begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$ liefert:

Kritische Stellen ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1):

$$D = \begin{vmatrix} -\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 4-12\cdot(-1)^2 \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 < 0 & ungerades\ \ k \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 8 > 0 & gerades\ \ k \end{cases}$$

=> Sattelpunkte S($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|-1|0) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1) = 2 – 1 – 1 = 0) für ungerades k, Hochpunkte H($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|-1| 2) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1) = 2 – 1 + 1 = 2) für gerades k.

Kritische Stellen ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 0):

$$D = \begin{vmatrix} -\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 4-12\cdot 0^2 \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0 & ungerades\ \ k \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 < 0 & gerades\ \ k \end{cases}$$

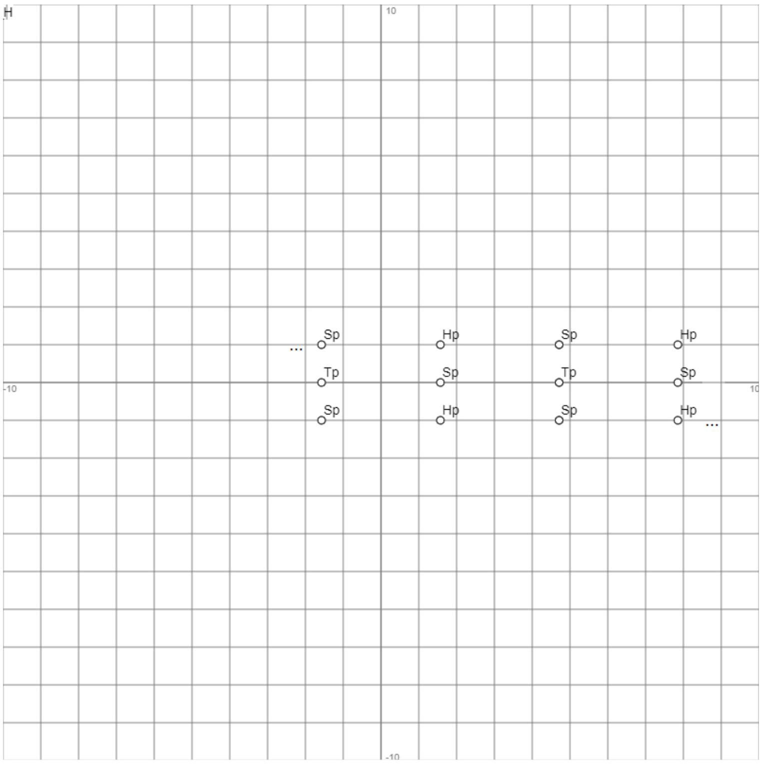
=> Tiefpunkte T($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|0|-1) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 0) = 0 – 0 – 1 = -1) für ungerades k, Sattelpunkte S($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|0|0) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1) = 0 – 0 + 1 = 1) für gerades k.

Kritische Stellen ($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 1):

$$D = \begin{vmatrix} -\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 4-12\cdot 1^2 \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 < 0 & ungerades\ \ k \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 8 > 0 & gerades\ \ k \end{cases}$$

=> Sattelpunkte S($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|1|0) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 1) = 2 – 1 – 1 = 0) für ungerades k, Hochpunkte H($(2k+1)\frac{\pi}{2}$|1|2) (wegen f($(2k+1)\frac{\pi}{2}$, -1) = 2 – 1 + 1 = 2) für gerades k.

Es ergibt sich folgendes, sich immer wiederholendes Schema der Tief-, Sattel- und Hochpunkte im x-y-Koordinatensystem:



Die Stellen, an denen lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion z = $f(x, y) = 2y^2 - y^4 + \sin x$ vorhanden sind, liegen auf den Geraden y = -1, y = 0, y = 1. Alle Tiefpunkte haben den Funktionswert z = -1, alle Sattelpunkte z = 0, alle Hochpunkte z = 2.

(**Z** = Menge der ganzen Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1448