Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^2 y^2 .$$

Bestimme Minima und Maxima der Funktion im Bereich $x^2+y^2 \leq 1$.

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der partiellen Ableitungen differenzieren:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

die 2. partiellen Ableitungen. Dabei gilt unter der Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

d.h.: die gemischten 2. Ableitungen sind identisch, die Reihenfolge der Differentiation austauschbar.

II. Mit Hilfe der 1. und 2. partiellen Ableitungen lassen sich dann relative Extremwerte (Maxima, Minima) und Sattelpunkte von Funktionen mit zwei Veränderlichen f(x,y) wie folgt bestimmen:

1) Bilde die 1. und 2. partiellen Ableitungen zu f(x,y) als:

$$f_x(x,y),\ f_y(x,y);\ f_{xx}(x,y),\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y).$$

2) Setze die 1. partiellen Ableitungen gleich null (notwendige Bedingung):

$$f_x(x,y) = 0,\ f_y(x,y) = 0$$

Das Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten x, y ist nach den Unbekannten aufzulösen. Man erhält eine Anzahl von Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), …

3) Die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), … werden in die 2. partiellen Ableitungen eingesetzt, so dass der Term

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_i, y_i) & f_{xy}(x_i, y_i) \\ f_{xy}(x_i, y_i) & f_{yy}(x_i, y_i) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_i, y_i) \cdot f_{yy}(x_i, y_i) - f_{xy}^2(x_i, y_i) \quad (i=1,2,\dots)$$

ausgewertet werden kann. D ist dabei die Determinante der Hesse-Matrix. Dann gilt für einen Punkt (x_i, y_i) (i=1,2,…):

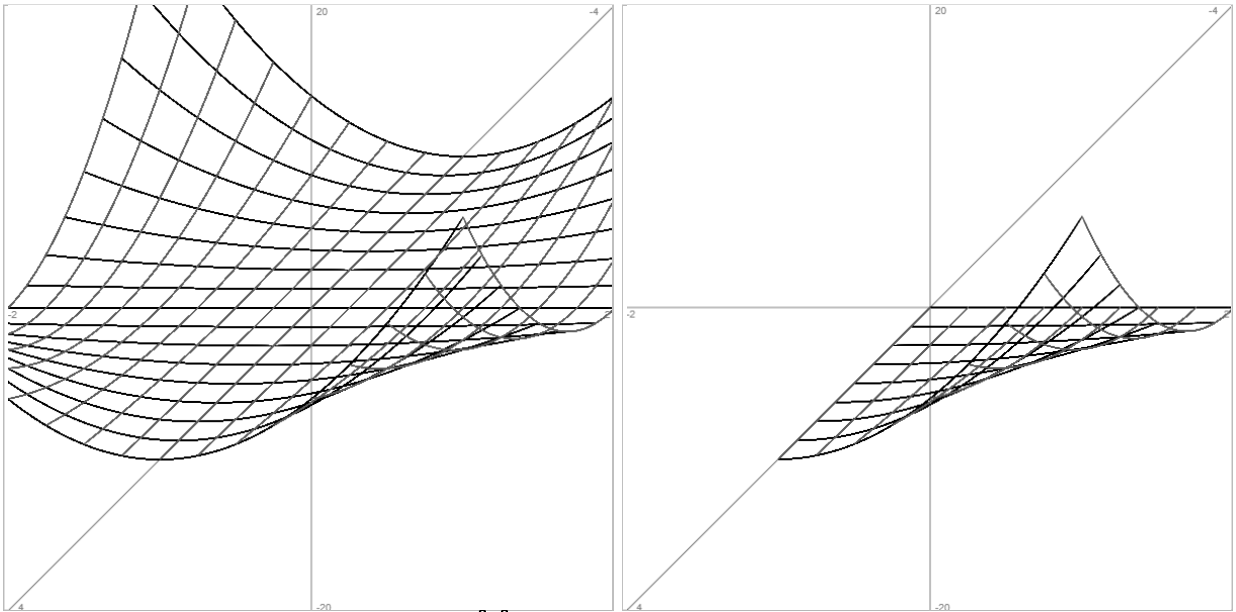
a) D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i, y_i) > 0$ ein relativer Tiefpunkt vor.

D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i, y_i) < 0$ ein relativer Hochpunkt vor.

b) D = 0: Es ist keine Entscheidung möglich.

c) D < 0: Es liegt ein Sattelpunkt vor.

III. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $f(x, y) = x^2 y^2$:



z = f(x,y) = x^2y^2, -2≤x, y≤2 bzw. 0≤x, y≤2, -20≤z≤20

IV. Wir bilden die partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^2$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x^2 y$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 4xy$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x^2$$

V. Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen ergibt die kritischen Stellen, an denen lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = x^2 y^2$ vorliegen können:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^2y = 0$$ => x = 0, y = 0.

Die kritischen Stellen (x, 0) bzw. (0, y) mit $x^2+y^2 \leq 1$

VI. Die Untersuchung der kritischen Stellen mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix

H = $\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$ liefert:

<u>Kritische Stellen</u> (x, 0):

D = $\begin{vmatrix} 2\cdot 0^2 & 4\cdot x\cdot 0 \\ 4\cdot x\cdot 0 & 2x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{vmatrix} = 0$

=> keine Entscheidung möglich.

<u>Kritische Stellen</u> (0, y):

D = $\begin{vmatrix} 2\cdot y^2 & 4\cdot 0\cdot y \\ 4\cdot 0\cdot y & 2\cdot 0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

=> keine Entscheidung möglich.

VII. Da die Determinante der Hesse-Matrix als Entscheidungskriterium für den Typ der kritischen Stellen (x, 0) von $f(x,y) = x^2y^2$ nicht zur Verfügung steht, muss wie folgt argumentiert werden. Es ist f(x, 0) = 0 und wegen $0 \leq x^2, y^2$ für alle reellen x, y auch: $f(x,y) = x^2y^2 \geq 0$, so dass:

$f(x, 0) = 0 \leq x^2y^2 = f(x,y)$ für alle reellen x, y

gilt. Es liegt also mit T(x|0|0), |x|≤1, ein nicht isoliertes Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2y^2$ vor. Analog ist T(0|y|0), |y|≤1, ein nicht isoliertes Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2y^2$, so dass im Bereich $x^2+y^2 \leq 1$ entlang y = 0, |x|≤1, und x = 0, |y|≤1, zwei aus <u>Minima</u> bestehende Strecken vorliegen.

VIII. Maxima, Minima der Funktion f(x,y) entlang einer durch die Nebenbedingung φ(x,y) = 0 vorgegebenen Kurve lassen sich dann mit Hilfe des <u>Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens</u> bestimmen (wenn auch nicht als solche nachweisen), d.h.:

1) Bilde die Lagrangefunktion L(x,y,λ) mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot\varphi(x,y)$$

2) Leite die Lagrangefunktion L(x,y,λ) partiell nach x, y und λ ab:

$$L_x(x,y\lambda) = f_x(x,y) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y)$$
$$L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y)$$
$$L_\lambda(x,y\lambda) = \varphi(x,y)$$

3) Setze die partiellen Ableitungen gleich 0, so dass ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Variablen x, y und λ entsteht:

$$f_x(x,y) + \lambda\cdot\varphi_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y) + \lambda\cdot\varphi_y(x,y) = 0$$
$$\varphi(x,y) = 0 \text{ (Nebenbedingung)}$$

4) Löse das Gleichungssystem nach x, y auf (das Auflösen nach λ ist nicht unbedingt notwendig).

5) Die Lösungen x und y des Gleichungssystems sind die Koordinaten möglicher Extrempunkte der Funktion z = f(x,y) mit der Nebenbedingung φ(x,y) = 0.

IX. Maxima der Funktion $f(x,y) = x^2y^2$ können am Rand des Bereichs $x^2+y^2 \leq 1$ vorliegen, d.h., wenn $x^2+y^2 = 1$ mit Einheitskreis und Kreismittelpunkt (0, 0) erfüllt ist. Wir bilden die Nebenbedingung: $\varphi(x,y) = x^2+y^2 - 1 = 0$ sowie die <u>Lagrangefunktion</u>: $L(x,y,\lambda) = x^2y^2 + \lambda(x^2+y^2 - 1)$. Ableiten der

Lagrangefunktion und Nullsetzen der partiellen Ableitungen führen auf:

$L_x(x,y,\lambda) = 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2x(y^2+\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = \pm\sqrt{-\lambda}$
$L_y(x,y,\lambda) = 2x^2y + 2\lambda y \Rightarrow 2y(x^2+\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \pm\sqrt{-\lambda}$
$L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - 1 = 0$

Aus x = 0 folgt: y = ±1; die Stellen (0, ±1) wurden schon als Minima erkannt; entsprechend liegen an den Stellen (±1, 0) Minima von $f(x,y) = x^2y^2$ vor (siehe VII.).

X. Zur Bestimmung der Maxima auf dem Rand $x^2+y^2 = 1$ verwenden wir die Beziehungen $x = \pm\sqrt{-\lambda}$, $y = \pm\sqrt{-\lambda}$ und haben, eingesetzt in die Nebenbedingung φ(x,y) = 0 mit $x^2 = y^2 = -\lambda$:

$-\lambda - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow -2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow -1 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -0{,}5$,

woraus wiederum folgt:

$x = \pm\sqrt{0{,}5} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \pm\sqrt{0{,}5} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

An den vier kritischen Stellen $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ liegen dann Maxima vor mit $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ wegen:

$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow y^2 \le 1-x^2$ für $|x|\le 1 \Rightarrow$

$$f(x,y) = x^2y^2 \le x^2(1-x^2) = x^2 - x^4 = -(x^4 - x^2) = -(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = -(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}.$$

Die vier Maxima lauten damit: $H(\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{4})$.

XI. Zum Vergleich bringt die Parametrisierung von $f(x,y) = x^2y^2$ entlang des Einheitskreises die Zuordnung $w(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t \cdot \sin^2 t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, mit: