Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Mehrdimensionale Funktionen

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x+4y}.$$

Bestimme (globale) Minima und Maxima der Funktion im Bereich $x^2+y^2 \leq 9$.

Lösung: I. Eine Funktion zweier Veränderlicher z = f(x,y) ordnet einem Paar von reellen Zahlen x, y eine reelle Zahl z zu. Im Falle von Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich die Funktionen mit Hilfe der <u>partiellen Ableitungen</u> differenzieren:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

heißen die 1. partiellen Ableitungen nach x und y,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

die 2. partiellen Ableitungen. Dabei gilt unter der Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

d.h.: die gemischten 2. Ableitungen sind identisch, die Reihenfolge der Differentiation austauschbar.

II. Mit Hilfe der 1. und 2. partiellen Ableitungen lassen sich dann relative <u>Extremwerte</u> (Maxima, Minima) und <u>Sattelpunkte</u> von Funktionen mit zwei Veränderlichen f(x,y) wie folgt bestimmen:

1) Bilde die 1. (und 2.) partiellen Ableitungen zu f(x,y) als:

$$f_x(x,y), \; f_y(x,y); \; f_{xx}(x,y), \; f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y), \; f_{yy}(x,y).$$

2) Setze die 1. partiellen Ableitungen gleich null (notwendige Bedingung):

$$f_x(x,y) = 0, \; f_y(x,y) = 0$$

Das Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten x, y ist nach den Unbekannten aufzulösen. Man erhält eine Anzahl von Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), …

3) Die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), … werden in die 2. partiellen Ableitungen eingesetzt, so dass der Term

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_i,y_i) & f_{xy}(x_i,y_i) \\ f_{xy}(x_i,y_i) & f_{yy}(x_i,y_i) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_i,y_i)\cdot f_{yy}(x_i,y_i) - f_{xy}^2(x_i,y_i) \text{ (i=1,2,…)}$$

ausgewertet werden kann. D ist dabei die Determinante der Hesse-Matrix. Dann gilt für einen Punkt (x_i, y_i) (i=1,2,…):

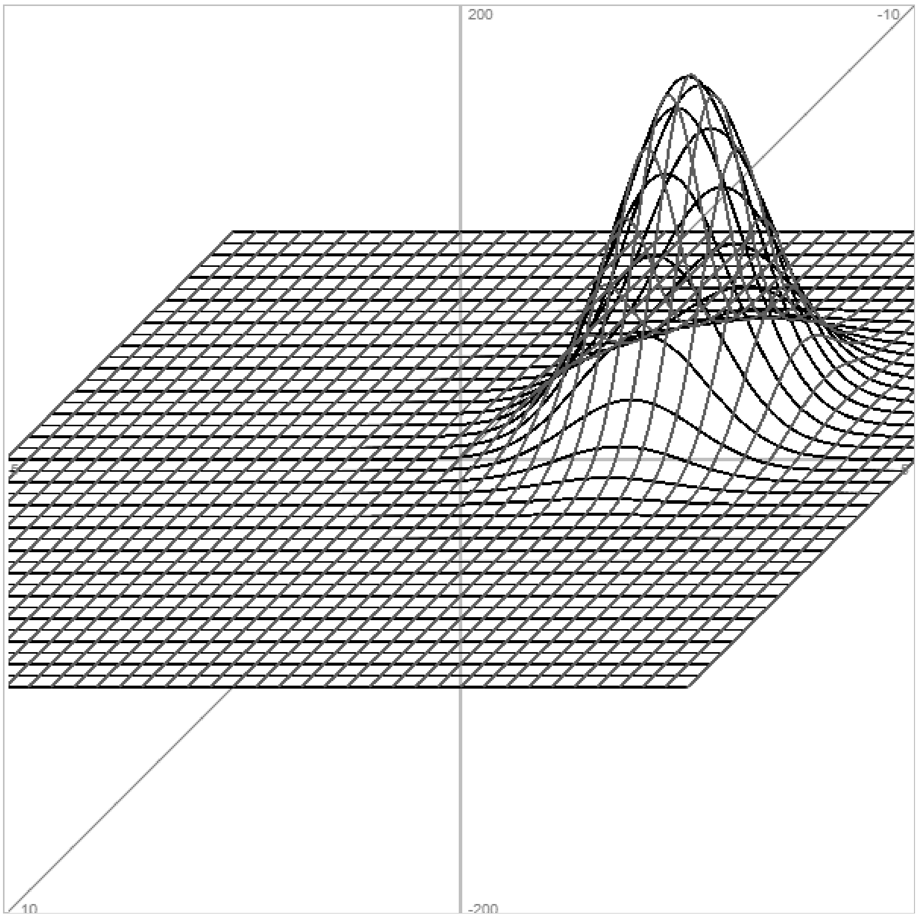
a) D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i,y_i)$ > 0 ein relativer Tiefpunkt vor.

D > 0: Es liegt mit $f_{xx}(x_i,y_i)$ < 0 ein relativer Hochpunkt vor.

b) D = 0: Es ist keine Entscheidung möglich.

c) D < 0: Es liegt ein Sattelpunkt vor.

III. Wir zeichnen zunächst den <u>Graphen</u> der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x+4y}$:



z = f(x,y) = $e^{-x^2-y^2-2x+4y}$, -5≤x, y≤5, -200≤z≤200

IV. Wir bilden die <u>partiellen Ableitungen</u> der Funktion:

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (-2x-2)e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-2y+4)e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = (4x^2+8x+2)e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = (-2x-2)(-2y+4)e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = (4y^2 - 16y + 14)e^{-x^2-y^2-2x+4y}$$

V. Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen ergibt die <u>kritischen Stellen</u>, an denen lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x+4y}$ im Bereich $x^2+y^2 \leq 9$ vorliegen können:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (-2x-2)e^{-x^2-y^2-2x+4y} = 0$ => -2x-2 = 0 => -2 = 2x => x = -1

$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-2y+4)e^{-x^2-y^2-2x+4y} = 0$ => -2y+4 = 0 => 4 = 2y => y = 2

Für die kritische Stelle (-1, 2) gilt: $(-1)^2+2^2 = 5 \leq 9$, so dass sie im zu untersuchenden Bereich $x^2+y^2 \leq 9$ liegt.

VI. Die Untersuchung der kritischen Stelle (-1, 2) mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix

H = $\begin{pmatrix} (4x^2+8x+2)e^{-x^2-y^2-2x+4y} & (-2x-2)(-2y+4)e^{-x^2-y^2-2x+4y} \\ (-2x-2)(-2y+4)e^{-x^2-y^2-2x+4y} & (4y^2-16y+14)e^{-x^2-y^2-2x+4y} \end{pmatrix}$ liefert:

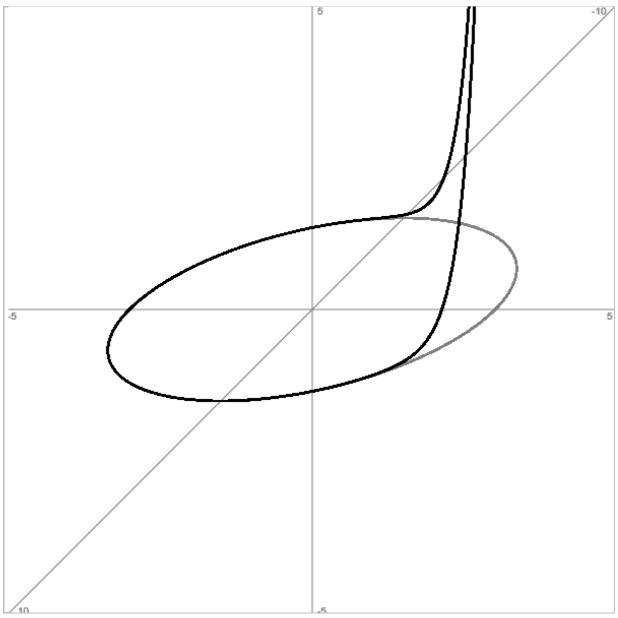
<u>Kritische Stelle</u> (-1, 2):

D = $\begin{vmatrix} (4-8+2)e^{-1-4+2+8} & 0 \cdot 0 \cdot e^{-1-4+2+8} \\ 0 \cdot 0 \cdot e^{-1-4+2+8} & (16-32+14)e^{-1-4+2+8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2e^5 & 0 \\ 0 & -2e^5 \end{vmatrix} = 4e^{10} > 0$

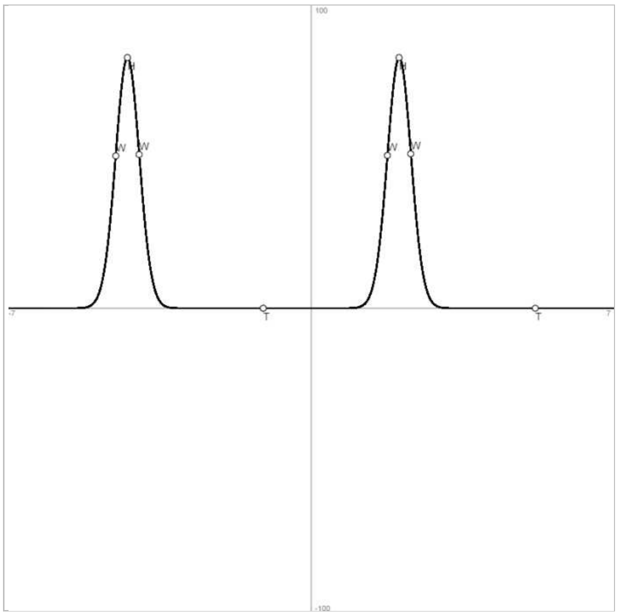
=> <u>Maximum</u> $H(-1|2|e^5)$ wegen $f_{xx}(-1, 2) = -2e^5 < 0$ (mit: $f(-1, 2) = e^5$).

VII. Da das Lagrangesche Multiplikatorverfahren zu einem nicht elementar lösbaren Gleichungssystem führt, führen wir entlang des Kreises $x^2+y^2 = 9$ (Kreisradius 3, Kreismittelpunkt als Ursprung der x-y-Ebene) eine <u>Parametrisierung</u> der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x+4y}$ durch und erhalten mit $x = 3\cdot\cos(t)$, $y = 3\cdot\sin(t)$:

w(t) = $\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ e^{-9\cos^2 t - 9\sin^2 t - 6\cos t + 12\sin t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ e^{-9-6\cos t+12\sin t} \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Betrachten wir noch y(t) = $e^{-9-6\cos t+12\sin t}$ auf dem Intervall [0; 2π], so hat diese Funktion das Aussehen:



mit Hochpunkt H(2,03|82,8) und Tiefpunkt T(5,18|0). Die Extrema von y(t) lassen sich auch mit Hilfe der 1. Ableitung errechnen:

y'(t) = $(6\sin t+12\cos t)e^{-9\cos^2 t-9\sin^2 t-6\cos t+12\sin t}$ = 0 => $6\sin t+12\cos t$ = 0 => $6\sin t=-12\cos t$ => $6\tan t=-12$ => $\tan t=-2$ => t = 2,03, t = 5,18.

Dem Graphen von y(t) entnehmen wir die Existenz eines Maximums und die eines Minimums im Intervall [0; 2π].

VIII. Wir fassen alle von uns aufgefunden Minima und Maxima der Funktion $f(x,y)=e^{-x^2-y^2-2x+4y}$ zusammen und haben:

Maximum: H(-1|2|148,41) (wegen f(-1, 2) = e^5 = 148,4)

Maximum: H(-1,34|2,68|82,8) (wegen t = 2,03 => x = 3·cos(2,03) = -1,34, y = 3·sin(2,03) = 2,68)

Minimum: T(1,34|-2,68|$1{,}9\cdot 10^{-10}$) (wegen t = 5,18 => x = 3·cos(5,18) = 1,34, y = 3·sin(5,18) = -2,68, bei f(1,34, -2,68) = $e^{-22{,}38}$ = $1{,}9\cdot 10^{-10}$).

Globales Maximum der Funktion $f(x,y)=e^{-x^2-y^2-2x+4y}$ im Bereich $x^2+y^2 \le 9$ ist mithin das Maximum: H(-1|2|148,41), globales Minimum der Punkt T(1,34|-2,68|$1{,}9\cdot 10^{-10}$). Anders ausgedrückt gilt:

$\max\limits_{x^2+y^2\le 9} f(x,y)=e^5$, $\min\limits_{x^2+y^2\le 9} f(x,y)=1{,}9\cdot 10^{-10}$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1450