Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Gegeben sei im Folgenden die Funktionenschar nach oben geöffneter Normalparabeln

$$f_t(x) = x^2 + 2tx + 2t$$

mit reellem Parameter t.

a) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_{-1}(x)$, $f_0(x)$, $f_{0,5}(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ in ein geeignetes x-y-Koordinaten-system ein.
b) Zeige, dass sich alle Funktionen $f_t(x)$ der Kurvenschar in einem Punkt P schneiden.
c) Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Funktionenschar $f_t(x)$.
d) Für welche Funktion $f_t(x)$ liegt der Tiefpunkt auf der y-Achse, für welche auf der x-Achse?
e) Für welches t ergibt sich der Tiefpunkt mit maximalem Funktionswert? Wie lautet der Tiefpunkt?

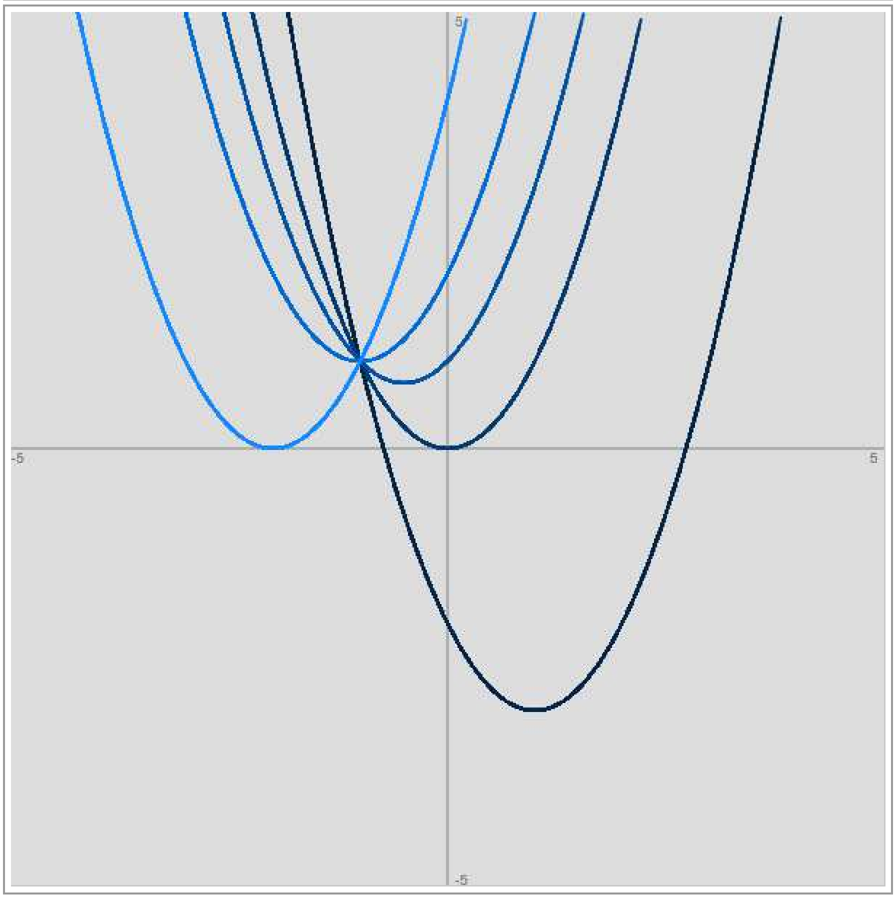
Lösung: a) Es ergeben sich als <u>Wertetabelle</u> und <u>Graphen</u> der Funktionen

$f_{-1}(x) = x^2–2x–2$
$f_0(x) = x^2$
$f_{0,5}(x) = x^2+x+1$
$f_1(x) = x^2+2x+2$
$f_2(x) = x^2+4x+4$

das Folgende:

Wertetabelle:					
x	**$f_{-1}(x)$**	**$f_0(x)$**	**$f_{0.5}(x)$**	**$f_1(x)$**	**$f_2(x)$**
-5	33	25	21	17	9
-4.5	27.25	20.25	16.75	13.25	6.25
-4	22	16	13	10	4
-3.5	17.25	12.25	9.75	7.25	2.25
-3	13	9	7	5	1
-2.5	9.25	6.25	4.75	3.25	0.25
-2	6	4	3	2	0
-1.5	3.25	2.25	1.75	1.25	0.25
-1	1	1	1	1	1
-0.5	-0.75	0.25	0.75	1.25	2.25
0	-2	0	1	2	4
0.5	-2.75	0.25	1.75	3.25	6.25
1	-3	1	3	5	9
1.5	-2.75	2.25	4.75	7.25	12.25
2	-2	4	7	10	16
2.5	-0.75	6.25	9.75	13.25	20.25
3	1	9	13	17	25
3.5	3.25	12.25	16.75	21.25	30.25
4	6	16	21	26	36
4.5	9.25	20.25	25.75	31.25	42.25
5	13	25	31	37	49

Graphen: Funktionenschar



b) Den gemeinsamen Schnittpunkt aller Funktionskurven bestimmen wir als Schnittpunkt zweier ausgewählter Parameterfunktionen und nehmen dazu die Parameter t = 0 und t = 1. Es gilt also:

$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow x^2 = x^2+x+1 \Leftrightarrow 0 = x+1 \Leftrightarrow -1 = x$

mit $f_0(-1) = (-1)^2 = 1 = f_1(-1)$, so dass sich als Schnittpunkt P(-1|1) ergibt. Wir zeigen nun, dass der Schnittpunkt auf allen Funktionskurven liegt und damit gemeinsamer Schnittpunkt der Kurvenschar $f_t(x)$ ist. Dazu führen wir mit dem Punkt P(-1|1) und dessen Koordinaten x = -1 und y = 1 eine Punktprobe mit einer beliebigen Funktion $f_t(x)$ durch. Wir erhalten aus: $f_t(x) = x^2+2tx+2t$ durch Einsetzen von x = -1 und $y = f_t(x) = 1$:

$1 = (-1)^2+2t\cdot(-1)+2t = 1–2t+2t = 1$

und damit eine wahre Aussage, so dass der Punkt P(-1|1) in der Tat auf allen Kurven der Funktionenschar $f_t(x)$ liegt.

c) I. Für jedes reelle t und jede Funktion der Funktionenschar $f_t(x) = x^2+2tx+2t$ ergibt sich mit der 1. und 2. Ableitung: $f_t'(x) = 2x+2t$, $f_t''(x) = 2$ und auf Grund von:

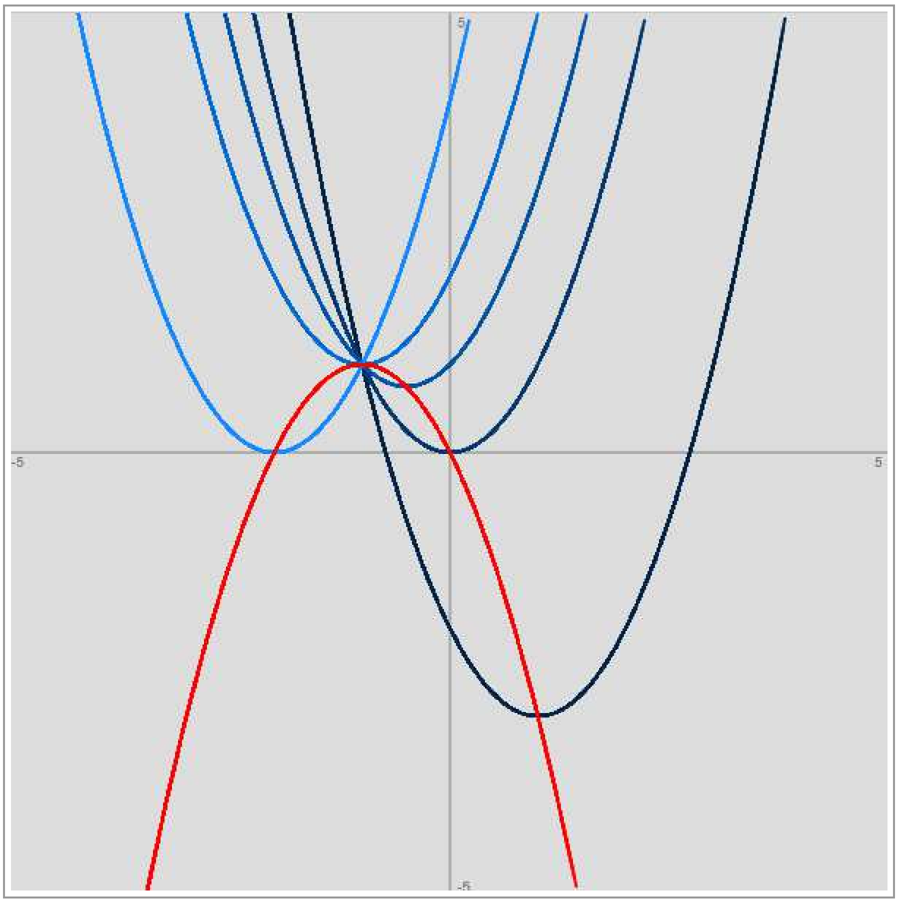
$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+2t = 0 \Leftrightarrow 2x = -2t \Leftrightarrow x = -t$

und: $f_t''(-t) = 2 > 0$ der Tiefpunkt $T(-t|f_t(-t)) = T(-t|-t^2+2t)$ wegen:

$f_t(-t) = (-t)^2+2t\cdot(-t)+2t = t^2–2t^2+2t = -t^2+2t$.

II. Die Ortskurve aller Tiefpunkte errechnet sich aus $T(-t|-t^2+2t)$ durch Setzen von x = -t und $y = -t^2+2t$, indem wir die t im y-Term durch x ersetzen. Denn aus x = -t folgt: t = -x, so dass Einsetzen in $y = -t^2+2t$ ergibt: $y = -(-x)^2+2\cdot(-x) = -x^2–2x$. Die Ortskurve lautet mithin: $y = -x^2–2x$.

Graphen: Funktionenschar, Ortskurve



d) I. Wir erhalten den auf der y-Achse liegenden Tiefpunkt der Parameterfunktionen $f_t(x)$, indem wir den Schnittpunkt der Ortskurve $y = -x^2–2x$ mit der y-Achse aus:

x = 0 => y = 0

als T(0|0) mit t = -x = 0 ermitteln. Die Funktion $f_0(x) = x^2$ hat also ihren Tiefpunkt auf der y-Achse.

II. Tiefpunkte der Funktionenschar auf der x-Achse errechnen sich mit der Ortskurve $y = -x^2–2x$ aus:

$y = 0 \Rightarrow -x^2–2x = 0 \Leftrightarrow x(-x–2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -x–2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$

Zu den x-Werten $x = 0$ und $x = -2$ passen wegen $t = -x = 0$ bzw. $t = -x = 2$ die Parameterfunktionen $f_0(x) = x^2$ bzw. $f_2(x) = x^2+4x+4$ mit den zugehörigen Tiefpunkten $T(0|0)$ bzw. $T(-2|0)$.

e) Den Tiefpunkt mit maximalem Funktionswert bestimmen wir, indem wir den Hochpunkt der Ortskurve $y = -x^2–2x$ ermitteln. Die 1. und 2. Ableitung der Ortskurve sind: $y' = -2x–2$, $y'' = -2$; Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x–2 = 0 \Leftrightarrow 2 = -2x \Leftrightarrow x = -1$,

Einsetzen von $x = -1$ in die 2. Ableitung auf: $y''(-1) = -2 < 0$, so dass in der Tat ein Hochpunkt der Ortskurve vorliegt. Der gesuchte Tiefpunkt lautet mit $y(-1) = -(-1)^2–2\cdot(-1) = -1+2 = 1$ $T(-1|1)$, ist also mit dem gemeinsamen Schnittpunkt aller Funktionskurven identisch. Wegen $t = -x$ und $x = -1$ ist das gesuchte t: $t = -(-1) = 1$, die dazugehörige Parameterfunktion lautet: $f_1(x) = x^2+2x+2$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2017 / Aufgabe 544