Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Funktionenscharen

Aufgabe: Für die Funktionenschar ganz rationaler Funktionen 3. Grades:

$$f_t(x) = x^2(x+3t)$$

mit reellem Parameter t ist die Ortskurve der Extrem- und Wendepunkte zu bestimmen.

Lösung: I. Allgemein gilt: Funktionenscharen (Funktionen mit Parametern, Parameterfunktionen) entstehen, wenn Funktionsgleichungen zur Funktionsvariablen x zusätzlich reelle Parameter t enthalten, wenn also: $f_t(x) = f(x, t)$ mit einer beliebigen, aber festen Zahl t gilt. Die Kurven $f_t(x)$ mit den vorgegebenen reellen t stellen die Funktionenschar grafisch dar, etwa als „Funktionenbüschel" oder als Schar zueinander paralleler Funktionen (z.B. bei Stammfunktionen). Funktionenscharen entstehen auch durch Verschiebung und/oder Streckung von Funktionen ($f_t(x) = f(x+t)$, $f_t(x) = t\cdot f(x)$ usw.). Für Parameterfunktionen gelten alle mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Differential- und Integralrechnung (Parameter als additive Konstante, konstanter Faktor u.a.). Daher entsteht die Ortskurve als Kurve von besonderen Punkten $P(x(t)|y(t))$ der Funktionenschar $f_t(x)$ (Hoch-, Tief-, Wendepunkte) mittels Bestimmung dieser Kurvenpunkte für jedes $f_t(x)$ und der Elimination des Parameters t, so dass aus: $x=x(t)$, $y=y(t)$ die Ortskurve $y=o(x)$ entsteht.

II. Wir ermitteln zunächst für jede Funktion $f_t(x)$ der Funktionenschar die 1. bis 3. Ableitung der Funktion $f_t(x) = x^2(x+3t) = x^3 + 3tx^2$ (Klammer auflösen wegen geschickteren Ableitens) und erhalten gemäß Faktor-, Potenz- und Summenregel:

$f_t'(x) = 3x^2 + 6tx$
$f_t''(x) = 6x + 6t$
$f_t'''(x) = 6$.

III. Wir ermitteln die Extremstellen der Parameterfunktionen $f_t(x) = x^2(x+3t)$ durch Nullsetzen der 1. Ableitung als:

$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6tx = 0 \Leftrightarrow x(3x+6t) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x +6t = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x = -6t \Leftrightarrow x = 0, x = -2t$.

Wir betrachten die 2. Ableitung an den Stellen x = 0 und x = -2t:

x=0: Es ist: $f_t''(0) = 6\cdot 0 + 6t = 6t$ mit $f_t''(0) < 0$ für $t < 0$ und folglich der Existenz eines Hochpunktes $H(0|0)$ an der Stelle x = 0, mit: $f_t''(0) > 0$ für $t > 0$ und demgemäß der Existenz eines Tiefpunktes $T(0|0)$ an der Stelle x = 0 bei $f_t(0) = 0^2(0+3t) = 0$. Insgesamt ergibt sich für jedes reelle $t\neq 0$ der Extrempunkt $E(0|0)$.

x=-2t: Wegen $f_t''(-2t) = 6\cdot(-2t) + 6t = -12t + 6t = -6t$ ist: $f_t''(-2t) > 0$ für $t < 0$ und liegt damit an der Stelle $x = -2t$ ein Tiefpunkt vor. Für $t > 0$ ist: $f_t''(-2t) < 0$, so dass die Stelle $x = -2t$ für einen Hochpunkt steht. Einsetzen der x-Koordinate in $f_t(x) = x^2(x+3t)$ ergibt:

$f_t(-2t) = (-2t)^2(-2t+3t) = 4t^2\cdot t = 4t^3$,

so dass für jedes reelle $t\neq 0$ der Extrempunkt $E(-2t|4t^3)$ vorliegt.

IV. Die Ortskurve aus all diesen Extrempunkten $E(-2t|-t^2/4)$, $t\neq 0$, errechnet sich durch Gleichsetzen der x-Koordinate des Extrempunkts $E(-2t|4t^3)$ mit x, der y-Koordinate mit y; also:

$x = -2t$, $y = 4t^3$.

Wir stellen die Gleichung $x = -2t$ nach t um:

$x = -2t \Leftrightarrow -x/2 = t \Leftrightarrow t = -x/2$

und ersetzen in der Gleichung $y = 4t^3$ die Variable t durch den x-Term $t = -x/2$:

$y = 4t^3 = 4(-x/2)^3 = -4x^3/8 = -x^3/2$,

so dass wir eine direkte Beziehung zwischen x und y erhalten. Die Ortskurve der Extrempunkte aller Funktionen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2(x+3t)$ lautet damit:

$y = -x^3/2$,

d.h.: alle Extrempunkte liegen auf einer kubischen Parabel durch den Koordinatenursprung. Auch der (zweite) Extrempunkt $E(0|0)$ befindet sich auf der Ortskurve. Wir bezeichnen die Ortskurve auch als:

$o_E(x) = -x^3/2$.

V. Zur Ermittlung des Wendepunktes der Parameterfunktionen $f_t(x) = x^2(x+3t)$ setzen wir die 2. Ableitung gleich Null:

$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6t = 0 \Leftrightarrow 6x = -6t \Leftrightarrow x = -t$.

Wegen $f_t'''(0) = 6 \neq 0$ liegt in der Tat ein Wendepunkt vor mit $W(0|0)$ für alle reellen t, also auch für $t = 0$. Die Parameterfunktion für $t = 0$: $f_0(x) = x^2(x+0) = x^3$ besitzt darüber hinaus keine Extrempunkt, sondern nur den Wendepunkt, der Sattelpunkt ist.

Die „Ortskurve" des Wendepunktes ist: $o_W(x) = 0$ einzig für $x = 0$.

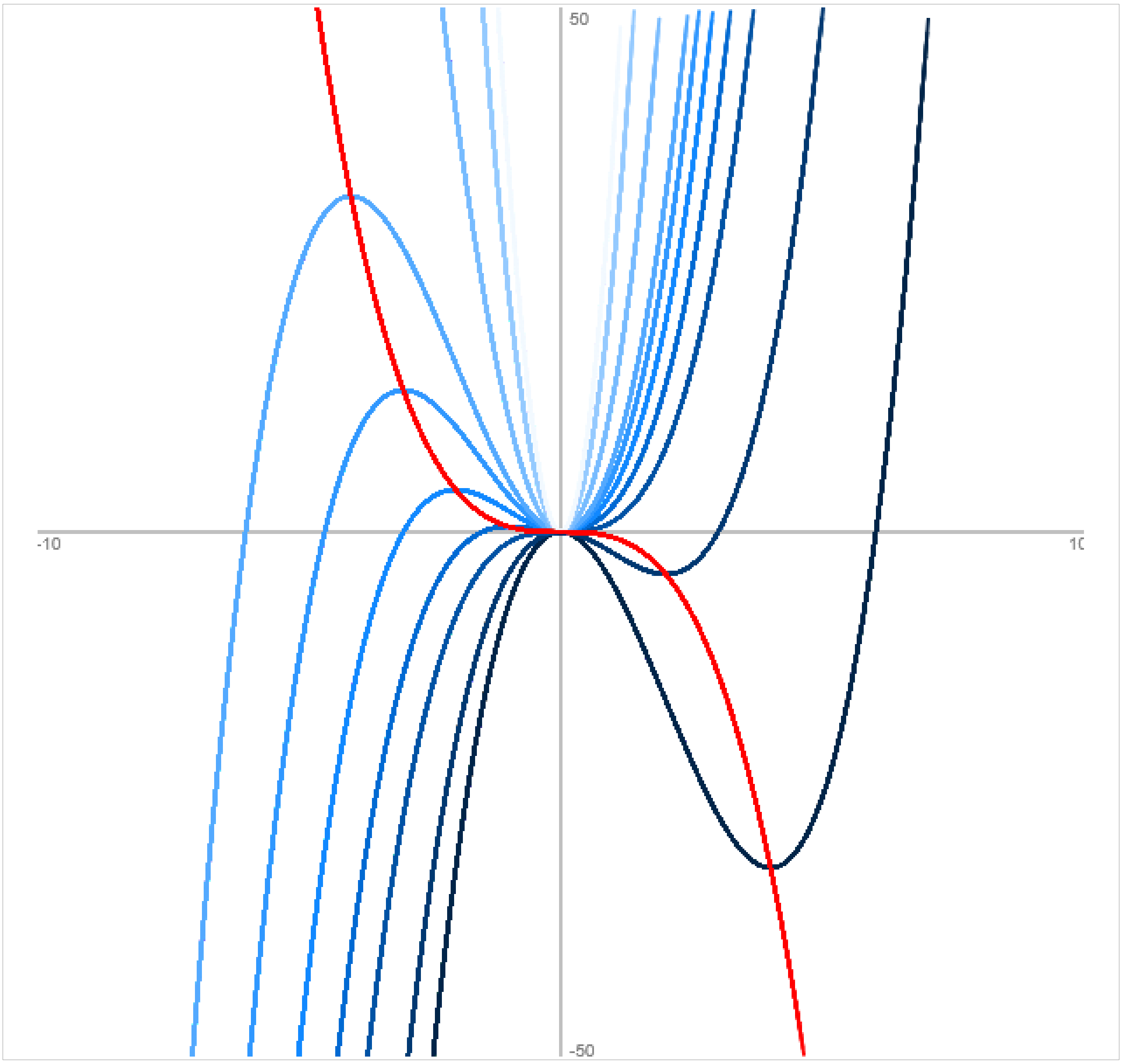
VI. Funktionenschar (für t = -2, -1, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 4, 8, 12) und Ortskurve der Extrempunkte sind nachfolgend erfasst in der Wertetabelle und als Graphen:

Wertetabelle:

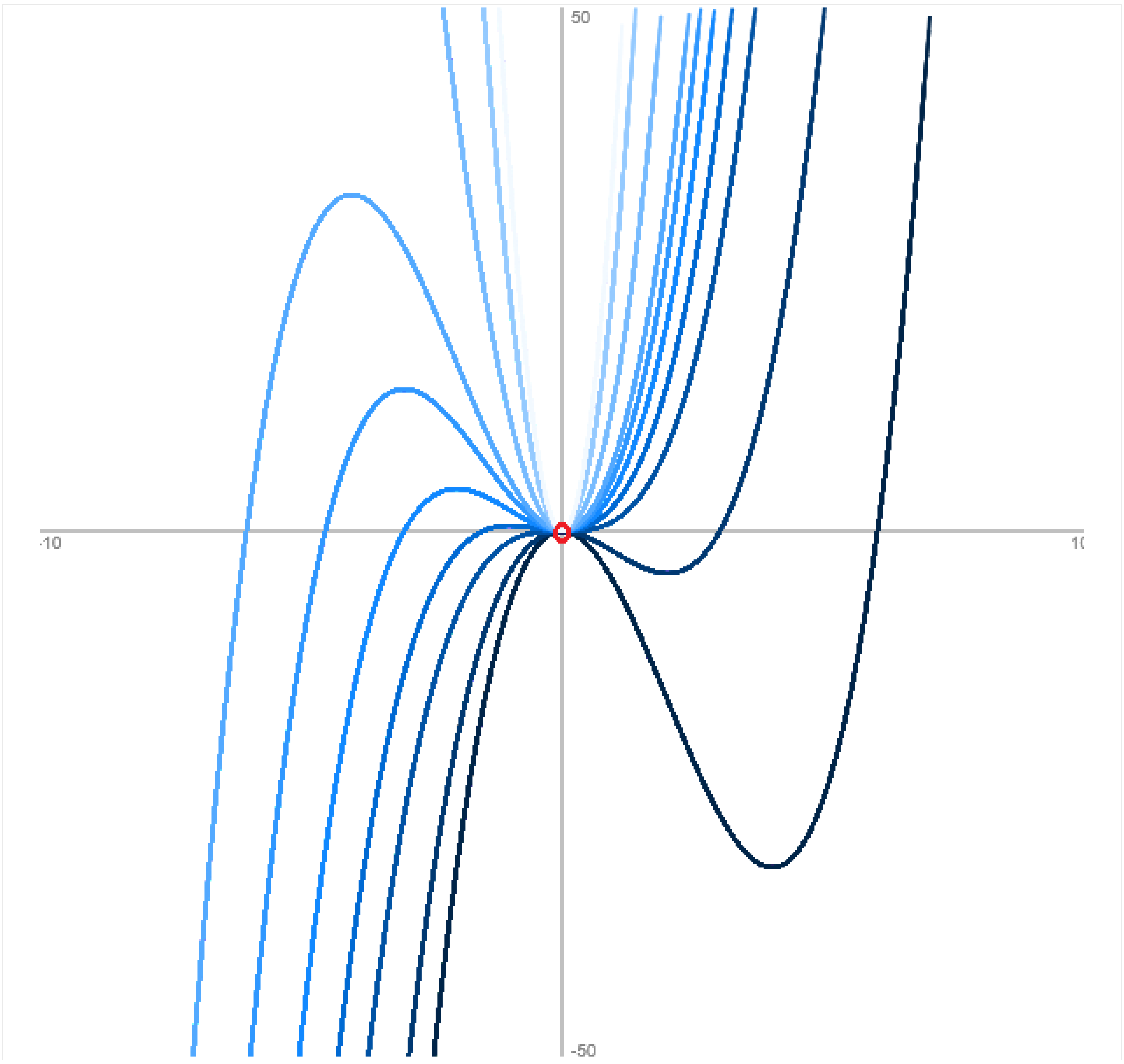
x	**$f_{-2}(x)$**	**$f_{-1}(x)$**	**$f_0(x)$**	**$f_{0.5}(x)$**	**$f_1(x)$**	**$f_{1.5}(x)$**	**$f_2(x)$**	**$f_4(x)$**	**$f_8(x)$**	**$f_{12}(x)$**	**Ortskurve y der Extrempunkte**
-10	-1600	-1300	-1000	-850	-700	-550	-400	200	1400	2600	500
-9.5	-1398.875	-1128.125	-857.375	-722	-586.625	-451.25	-315.875	225.625	1308.625	2391.625	428.6875
-9	-1215	-972	-729	-607.5	-486	-364.5	-243	243	1215	2187	364.5
-8.5	-1047.625	-830.875	-614.125	-505.75	-397.375	-289	-180.625	252.875	1119.875	1986.875	307.0625
-8	-896	-704	-512	-416	-320	-224	-128	256	1024	1792	256
-7.5	-759.375	-590.625	-421.875	-337.5	-253.125	-168.75	-84.375	253.125	928.125	1603.125	210.9375
-7	-637	-490	-343	-269.5	-196	-122.5	-49	245	833	1421	171.5
-6.5	-528.125	-401.375	-274.625	-211.25	-147.875	-84.5	-21.125	232.375	739.375	1246.375	137.3125
-6	-432	-324	-216	-162	-108	-54	0	216	648	1080	108
-5.5	-347.875	-257.125	-166.375	-121	-75.625	-30.25	15.125	196.625	559.625	922.625	83.1875
-5	-275	-200	-125	-87.5	-50	-12.5	25	175	475	775	62.5
-4.5	-212.625	-151.875	-91.125	-60.75	-30.375	0	30.375	151.875	394.875	637.875	45.5625
-4	-160	-112	-64	-40	-16	8	32	128	320	512	32
-3.5	-116.375	-79.625	-42.875	-24.5	-6.125	12.25	30.625	104.125	251.125	398.125	21.4375
-3	-81	-54	-27	-13.5	0	13.5	27	81	189	297	13.5
-2.5	-53.125	-34.375	-15.625	-6.25	3.125	12.5	21.875	59.375	134.375	209.375	7.8125
-2	-32	-20	-8	-2	4	10	16	40	88	136	4
-1.5	-16.875	-10.125	-3.375	0	3.375	6.75	10.125	23.625	50.625	77.625	1.6875
-1	-7	-4	-1	0.5	2	3.5	5	11	23	35	0.5
-0.5	-1.625	-0.875	-0.125	0.25	0.625	1	1.375	2.875	5.875	8.875	0.0625

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	-1.375	-0.625	0.125	0.5	0.875	1.25	1.625	3.125	6.125	9.125	-0.0625
1	-5	-2	1	2.5	4	5.5	7	13	25	37	-0.5
1.5	-10.125	-3.375	3.375	6.75	10.125	13.5	16.875	30.375	57.375	84.375	-1.6875
2	-16	-4	8	14	20	26	32	56	104	152	-4
2.5	-21.875	-3.125	15.625	25	34.375	43.75	53.125	90.625	165.625	240.625	-7.8125
3	-27	0	27	40.5	54	67.5	81	135	243	351	-13.5
3.5	-30.625	6.125	42.875	61.25	79.625	98	116.375	189.875	336.875	483.875	-21.4375
4	-32	16	64	88	112	136	160	256	448	640	-32
4.5	-30.375	30.375	91.125	121.5	151.875	182.25	212.625	334.125	577.125	820.125	-45.5625
5	-25	50	125	162.5	200	237.5	275	425	725	1025	-62.5
5.5	-15.125	75.625	166.375	211.75	257.125	302.5	347.875	529.375	892.375	1255.375	-83.1875
6	0	108	216	270	324	378	432	648	1080	1512	-108
6.5	21.125	147.875	274.625	338	401.375	464.75	528.125	781.625	1288.625	1795.625	-137.3125
7	49	196	343	416.5	490	563.5	637	931	1519	2107	-171.5
7.5	84.375	253.125	421.875	506.25	590.625	675	759.375	1096.875	1771.875	2446.875	-210.9375
8	128	320	512	608	704	800	896	1280	2048	2816	-256
8.5	180.625	397.375	614.125	722.5	830.875	939.25	1047.625	1481.125	2348.125	3215.125	-307.0625
9	243	486	729	850.5	972	1093.5	1215	1701	2673	3645	-364.5
9.5	315.875	586.625	857.375	992.75	1128.125	1263.5	1398.875	1940.375	3023.375	4106.375	-428.6875
10	400	700	1000	1150	1300	1450	1600	2200	3400	4600	-500

Graphen (Ortskurve der Extrempunkte):



Graphen (Wendepunkt als Ortskurve):



www.michael-buhlmann.de / 11.2018 / Aufgabe 706