Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ganz rationale Funktionen 4. Grades

Aufgabe: Zeige: Jede ganz rationale Funktion 4. Grades f(x) besitzt mindestens einen Extrempunkt.

Lösung: I. Für eine ganz rationale Funktion $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ n. Grades gilt hinsichtlich der Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung g'(x) = 0 lösen, Lösungen in g''(x) einsetzen):

a) g'(x) = 0 -> x_1, x_2, …
b) g''(x_1) < 0 -> H(x_1|g(x_1)) oder g''(x_1) > 0 -> T(x_1|g(x_1)); g''(x_2) < 0 -> H(x_2|g(x_2)) oder g''(x_2) > 0 -> T(x_2|g(x_2)); … oder:
c) Vorzeichenwechsel von g'(x) von + nach – bei g'(x_1) = 0 -> H(x_1|g(x_1)) oder: Vorzeichenwechsel von g'(x) von – nach + bei g'(x_1) = 0 -> T(x_1|g(x_1)); Vorzeichenwechsel von g'(x) von + nach – bei g'(x_2) = 0 -> H(x_2|g(x_2)) oder: Vorzeichenwechsel von g'(x) von – nach + bei g'(x_2) = 0 -> T(x_2|g(x_2)); …

II. Jede ganz rationale Funktion 4. Grades f(x) ist von der Form:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ a \neq 0.$

Für die 1. Ableitung gilt dann:

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$

Wir untersuchen nachfolgend die 1. Ableitung f'(x) als ganz rationale Funktion 3. Grades (g(x)).

III. Gemäß der höchsten Potenz x^3 von f'(x) gilt:

a > 0: x->-∞: f'(x)->-∞; x->+∞: f'(x)->+∞
a < 0: x->-∞: f'(x)->+∞; x->+∞: f'(x)->-∞.

D.h. aber: Die Kurve von f'(x) muss im Verlauf der y-Werte von -∞ nach +∞ bzw. von +∞ nach -∞ (bei x von -∞ nach +∞) auf jeden Fall die x-Achse schneiden, also mindestens eine Nullstelle x_0 mit f'(x_0) = 0 besitzen (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen). Damit ist die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes von f(x) erfüllt.

IV. Betrachtet man noch zudem, dass (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Nullstelle x_0 noch einen Vorzeichenwechsel bei f'(x) besitzen muss, so ist auch die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt von f(x) erfüllt, so dass an der Stelle x_0 in der Tat ein Hoch- oder Tiefpunkt von f(x) vorliegen muss.

V. Die letzte Überlegung wird auch dadurch klar, dass die 1. Ableitung f'(x) als ganz rationale Funktion in einer Produktform darstellbar ist. Und zwar gelten die sich gegenseitig ausschließenden Darstellungen:

a) $f'(x) = 4a(x-x_0)^3$ -> dreifache Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel
b) $f'(x) = 4a(x-x_0)(x-x_1)^2$ -> einfache Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel, doppelte Nullstelle $x_1 \neq x_0$
c) $f'(x) = 4a(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ -> einfache, paarweise verschiedene Nullstellen x_0, x_1, x_2 jeweils mit Vorzeichenwechsel
d) $f'(x) = 4a(x-x_0)(x^2+px+q)$ -> einfache Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel, quadratische (irreduzible) Parabel $y=x^2+px+q$ ohne Nullstelle.

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 993