Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Was lässt sich über eine ganz rationale Funktion f(x) vom Grad n = grad(f(x)) aussagen?

Lösung: I. Eine ganz rationale Funktion n. Grades genügt der Funktionsgleichung:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ bzw. f(x) = ax^n + …

(mit höchster Potenz x^n bzw. höchstem, dem Grad der Funktion entsprechendem Exponenten n, $a_n \neq 0$ bzw. $a \neq 0$, n als natürliche Zahl oder 0). Für die Ableitungen gilt:

$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$ bzw. f'(x) = nax^{n-1} + …

$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$ bzw. f''(x) = $n(n-1)ax^{n-2}$ + …

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$

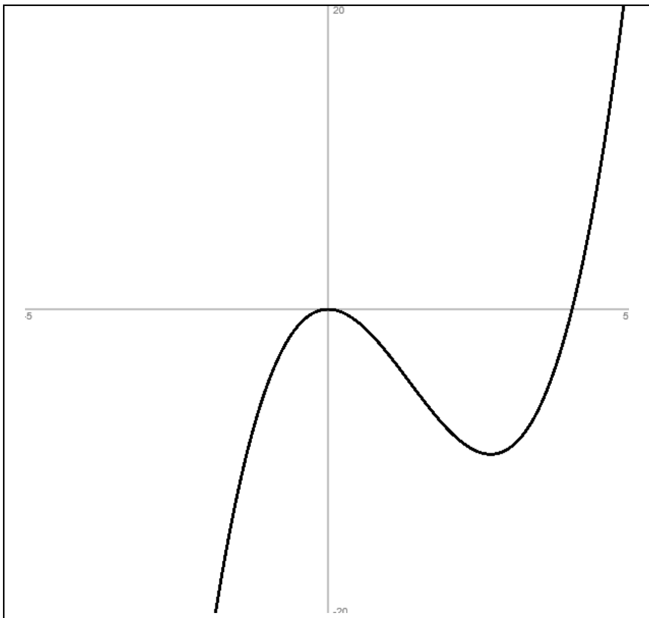
bzw. f'''(x) = $n(n-1)(n-2)ax^{n-3}$ + …

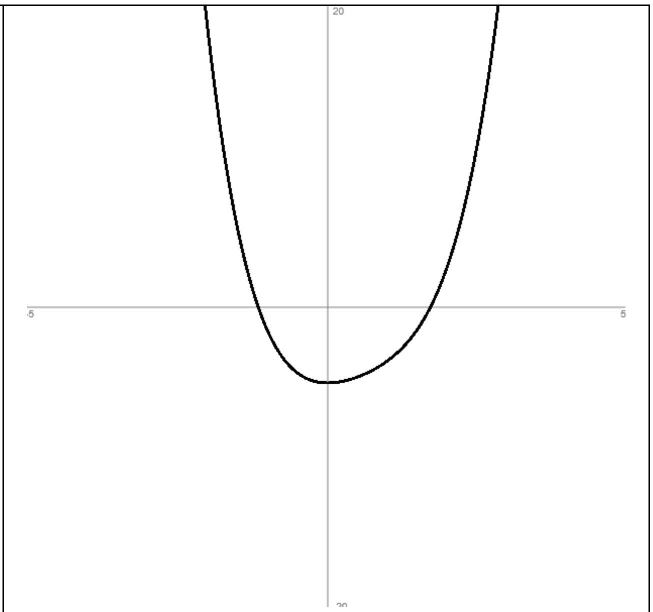
Aus den Darstellungen von Funktion und Ableitungen folgt II. bis VII.:

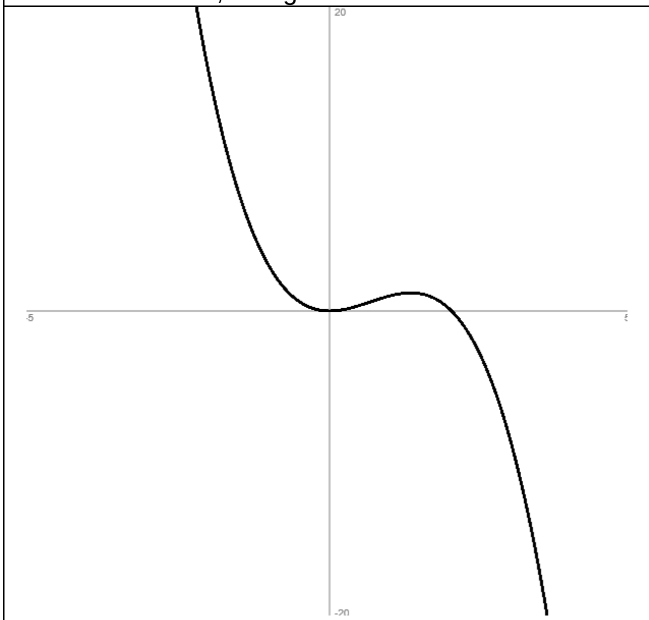
II. Für jede ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \dots$ ergibt sich hinsichtlich des Verhaltens für betragsmäßig große x, also <u>für x->-∞ bzw. x->+∞</u>:

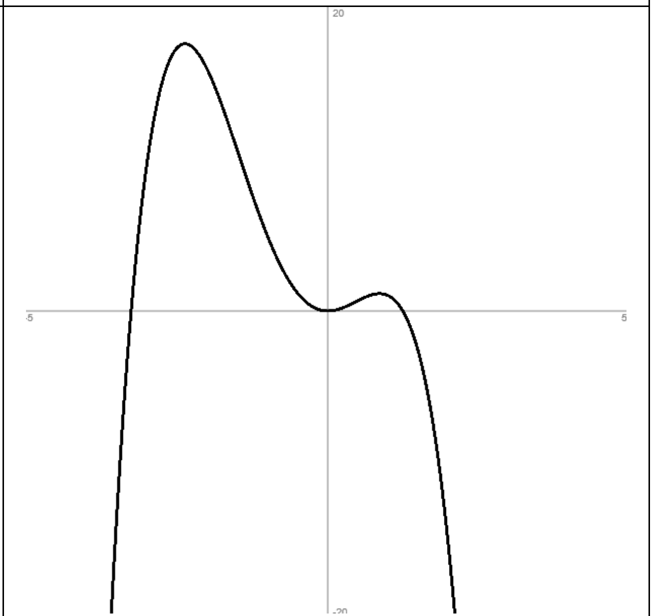
a>0	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞
x->∞:	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞

a<0	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞
x->∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞


a>0, n ungerade: -∞ -> +∞


a>0, n gerade: +∞ -> +∞

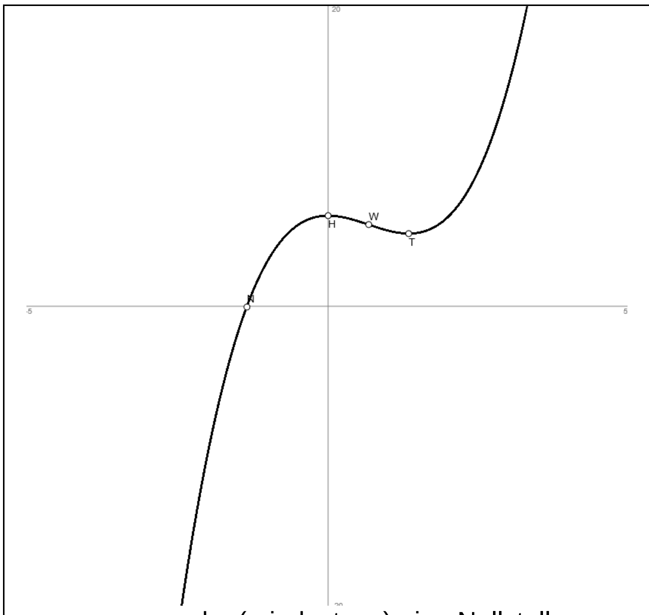

a<0, n ungerade: +∞ -> -∞


a<0, n gerade: -∞ -> -∞

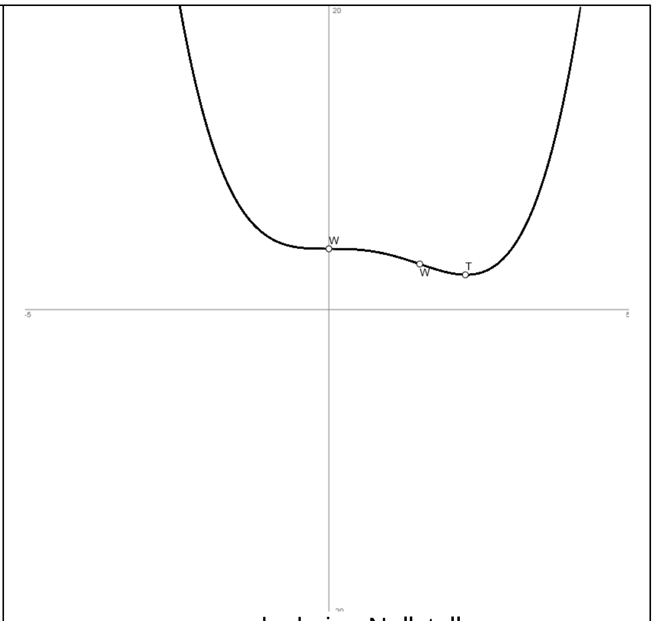
III. Die <u>Nullstellen</u> einer ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \ldots$ ergeben sich aus:

Notwendige, hinreichende Bedingung: $f(x) = ax^n + \ldots = 0$ => maximal n Lösungen der Gleichung => maximal n Nullstellen der Funktion.

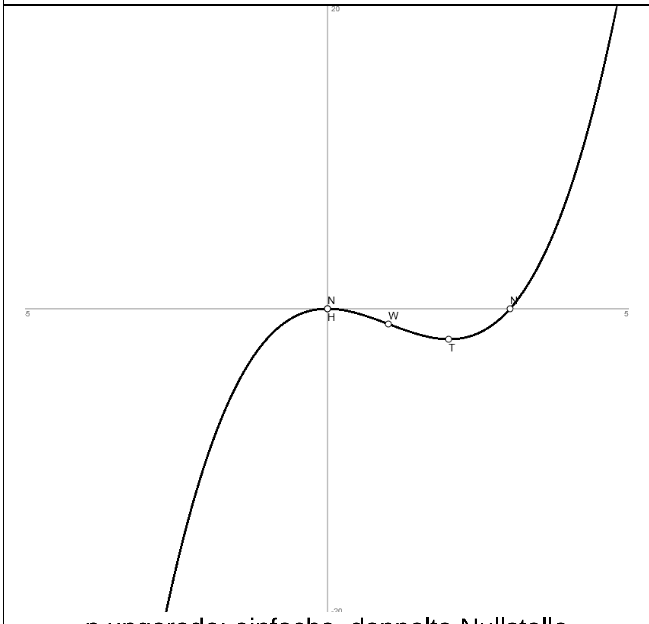
Ist n ungerade, so besitzt die Funktion f(x) mindestens eine Nullstelle. Ist n gerade, so kann es auch keine Nullstellen geben. Die Nullstellen können auch in Vielfachheiten auftreten (einfache, doppelte, dreifache Nullstellen, …).



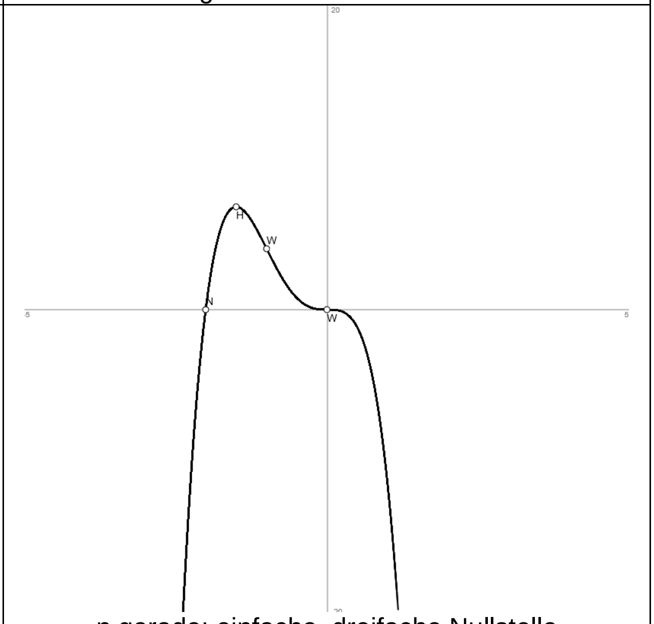
n ungerade: (mindestens) eine Nullstelle



n gerade: keine Nullstelle



n ungerade: einfache, doppelte Nullstelle

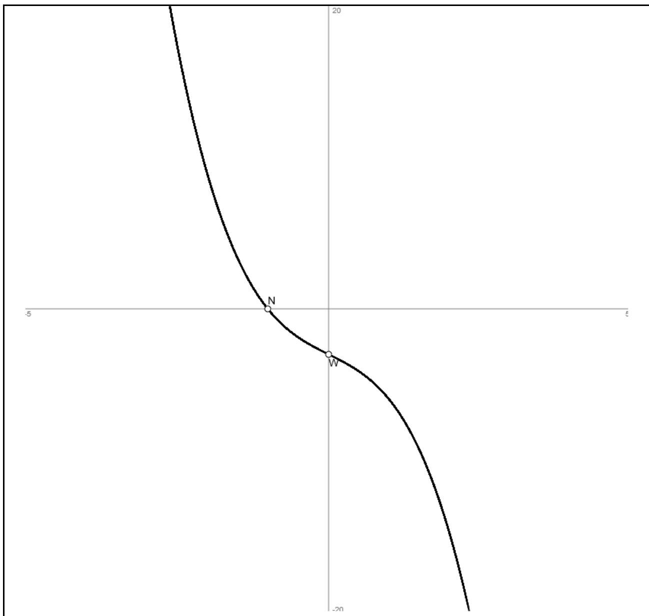


n gerade: einfache, dreifache Nullstelle

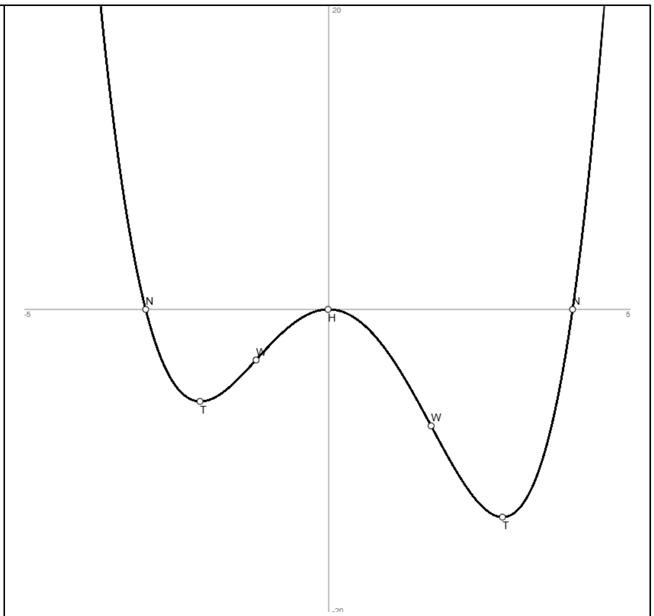
IV. Hinsichtlich der <u>Hoch- und Tiefpunkte</u> einer ganz rationalen Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + …$ gilt:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = nax^{n-1} + … = 0$ => maximal n-1 Lösungen der Gleichung => maximal n-1 Punkte mit waagerechter Tangente => maximal n-1 Extrempunkte (oder Sattelpunkte) der Funktion.

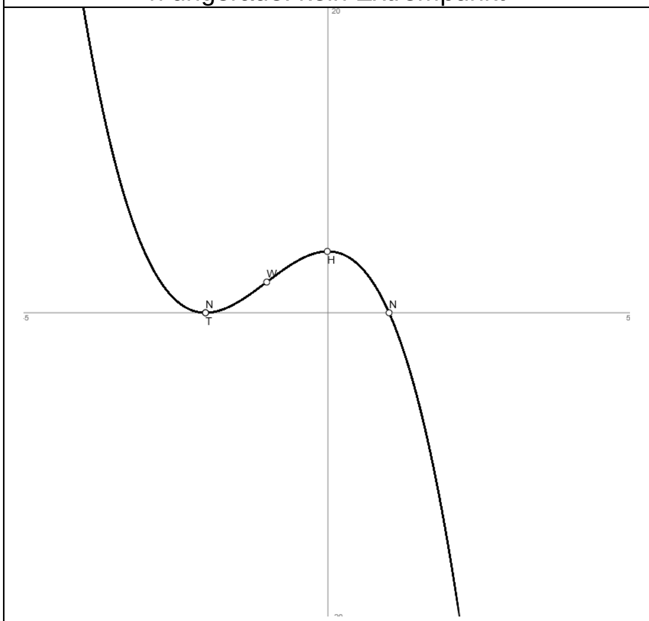
Ist n gerade, so gibt es mindestens einen Punkt mit waagerechter Tangente, der gleichzeitig Hoch- oder Tiefpunkt der Funktion f(x) ist; ist n ungerade, so kann es auch keine Hoch- und Tiefpunkte geben, und es kann niemals eine ungerade Anzahl von Extrempunkten geben.



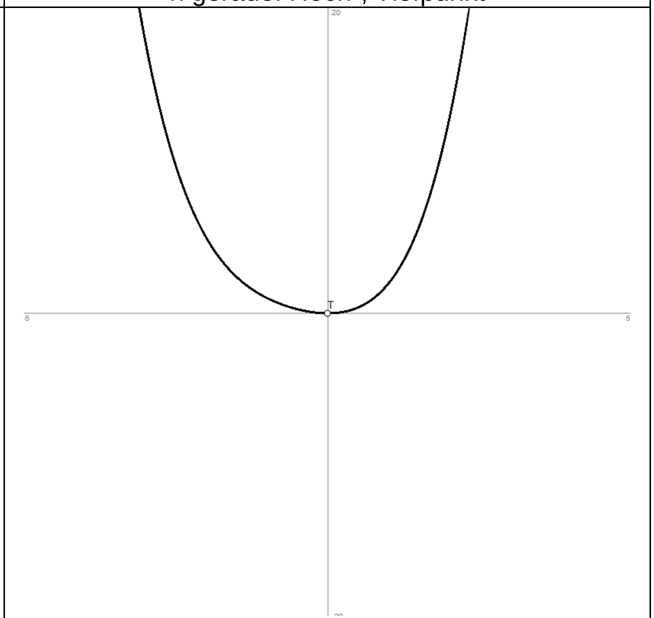
n ungerade: kein Extrempunkt



n gerade: Hoch-, Tiefpunkt



n ungerade: Hoch-, Tiefpunkt

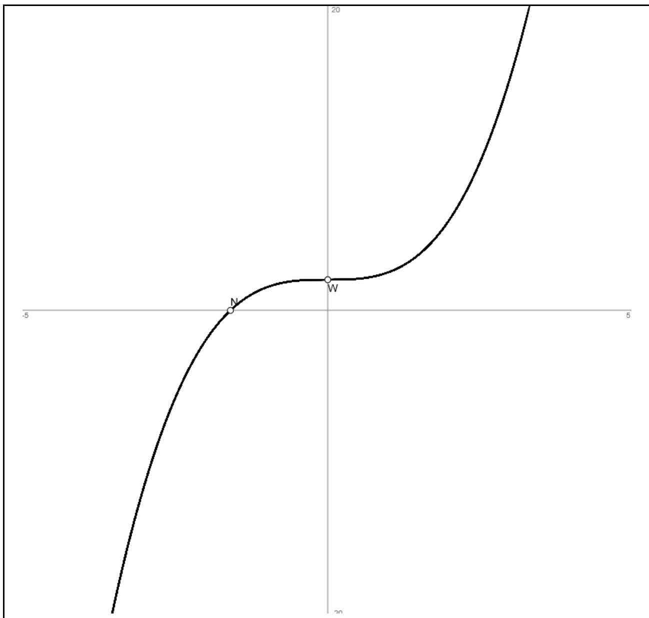


n gerade: Tiefpunkt

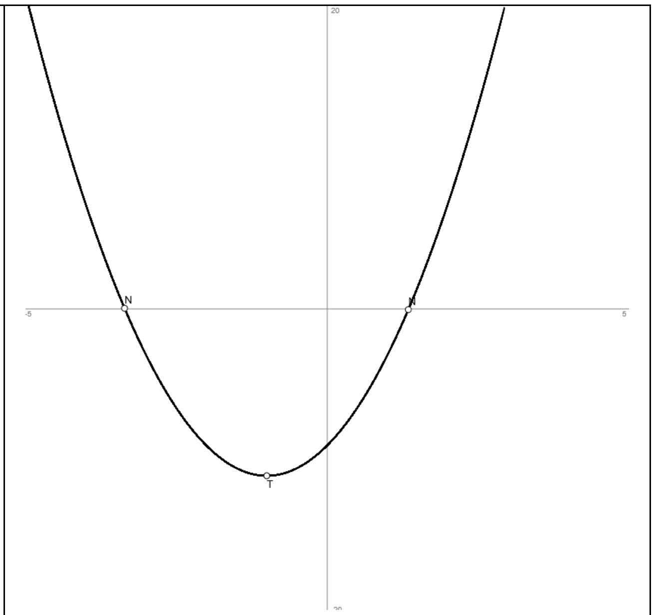
V. Hinsichtlich der Wendepunkte einer ganz rationalen Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \dots$ gilt:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = n(n-1)ax^{n-2} + \dots$ => maximal n-2 Lösungen der Gleichung => maximal n-2 Wendepunkte der Funktion.

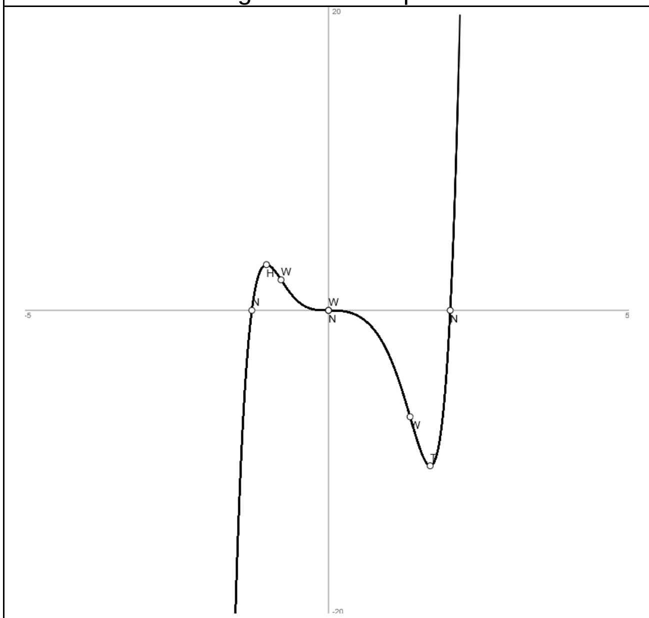
Ist n ungerade, so besitzt die Funktion f(x) mindestens einen Wendepunkt; ist n gerade, so kann es auch keine Wendepunkte geben, und es kann niemals eine ungerade Anzahl von Wendepunkten geben.



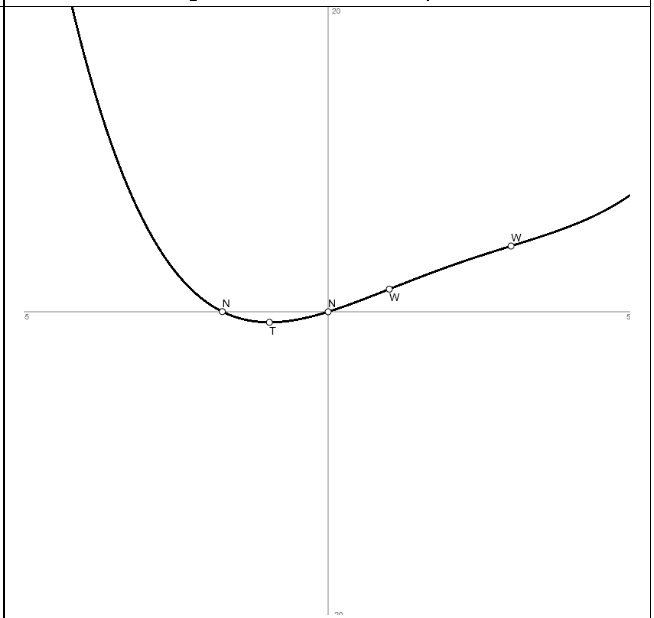
n ungerade: Sattelpunkt



n gerade: kein Wendepunkt



n ungerade: zwei Wendepunkte, ein Sattelpunkt

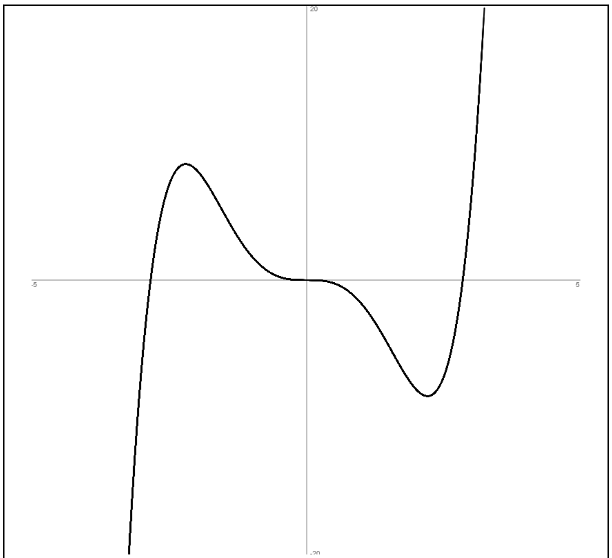


n gerade: zwei Wendepunkte

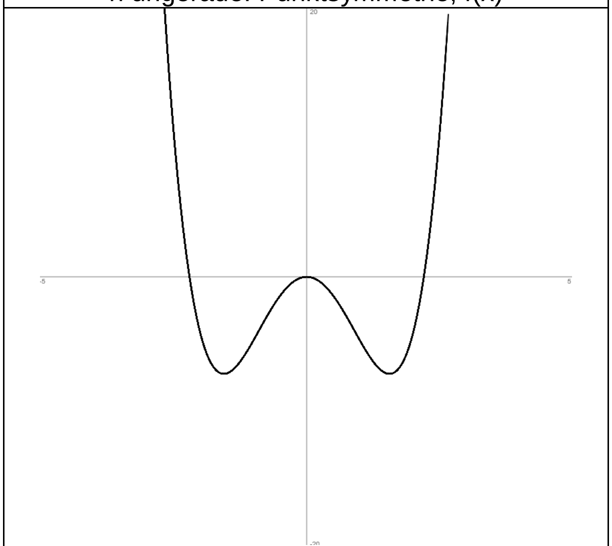
VI. Eine ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \ldots$ ist für ungerades n <u>punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems</u> (<u>ungerade</u>), wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen ungerade sind, wenn also $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dann folgt:

f(x) punktsymmetrisch zum Ursprung => f'(x) achsensymmetrisch zur y-Achse => f''(x) punktsymmetrisch zum Ursprung usw.

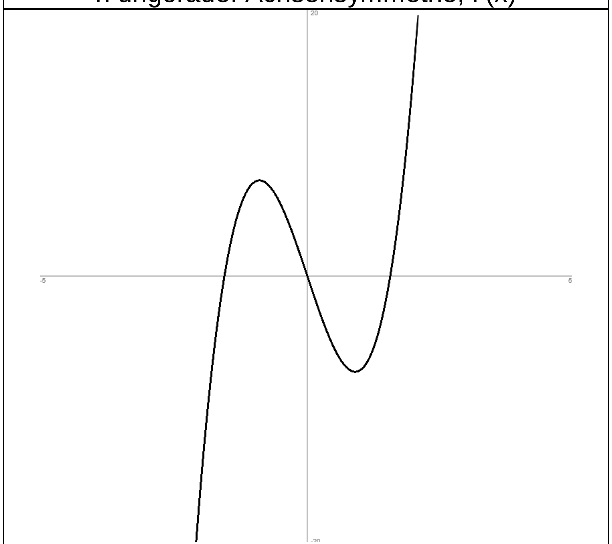
Es folgt weiter: Jede ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \ldots$ hat für ungerades $n \geq 3$ einen Wendepunkt im Ursprung O(0|0), wenn sie punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ist.



n ungerade: Punktsymmetrie, f(x)



n ungerade: Achsensymmetrie, f'(x)

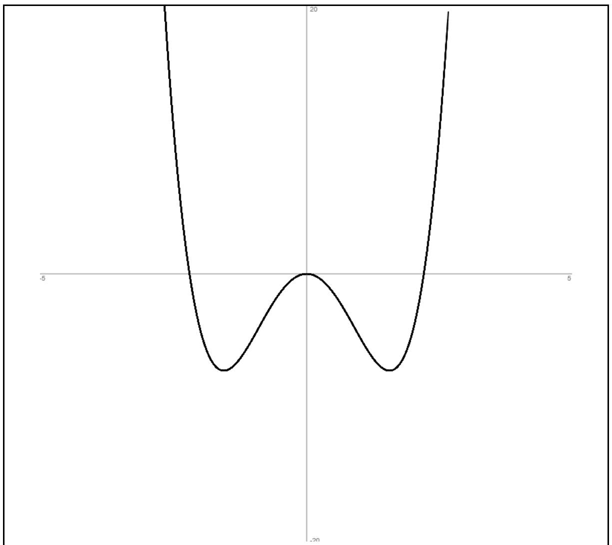


n ungerade: Punktsymmetrie, f''(x)

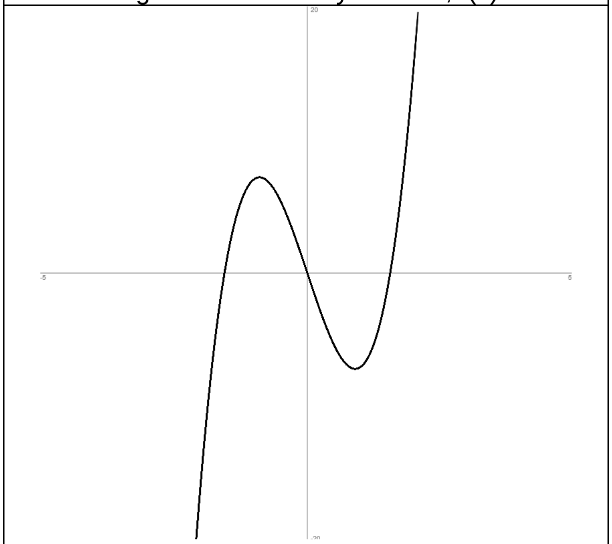
VII. Eine ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \dots$ ist für gerades n achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems (gerade), wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen gerade sind, wenn also $f(-x) = f(x)$ gilt. Dann folgt:

f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse => f'(x) punktsymmetrisch zum Ursprung => f''(x) achsensymmetrisch zur y-Achse usw.

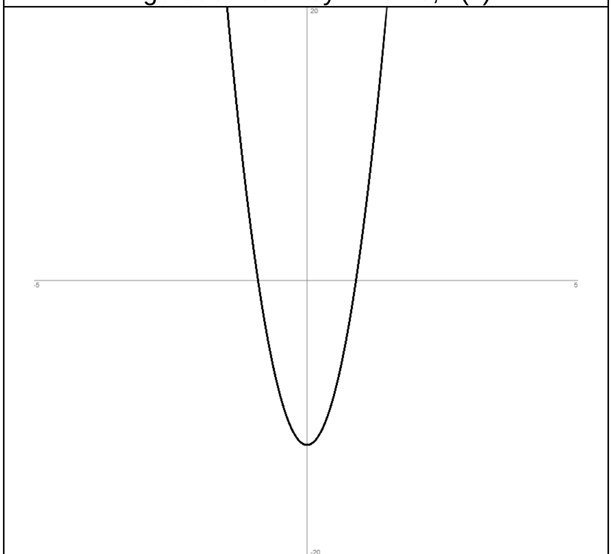
Entsprechend gilt: Jede ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + \dots$ hat für gerades $n \geq 2$ einen Hoch- oder Tiefpunkt auf der y-Achse, wenn sie achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems ist.



n gerade: Achsensymmetrie, f(x)



n gerade: Punktsymmetrie, f'(x)



n gerade: Achsensymmetrie, f''(x)